Topologia
Lista zadań

Jacek Cichoń, WIT, PWr, 2024/25

1 Wstęp

Zadanie 1 — (Przestrzeń Baire'a) Pokaż, że para $\mathcal{N} = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ z metryką określoną wzorem

$$d(f,g) = \begin{cases} 0 & : f = g \\ \frac{1}{1+\min\{k : f(k) \neq g(k)\}} & : f \neq g \end{cases}$$

jest przestrzenią metryczną. Wyznacz kulę $B(f, 1/5)$ w tej przestrzeni.

Zadanie 2 — Niech A i B będą podzbiorami przestrzeni metrycznej (X, d) takimi, że $A \cap B \neq \emptyset$. Pokaż, że

$$\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B) \ ,$$

gdzie $\delta(C) = \sup\{d(x,y) : x, y \in C\}$.

Zadanie 3 — Pokaż, że dla dowolnych podzbiorów przestrzeni topologicznej mamy

1. $\mathrm{cl}\,(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}\,(A) \cap \mathrm{cl}\,(B)$
2. $\mathrm{int}\,(A) \cup \mathrm{int}\,(B) \subseteq \mathrm{int}\,(A \cup B)$.

Podaj przykłady w których inkluzje te są właściwe.

Zadanie 4 — Rozważamy liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ ze standardową topologią. Niech

$$A = (0,1) \cup (1,2) \cup \{3\} \cup \big([4,5] \cap \mathbb{Q}\big)$$

Wyznacz wszystkie zbiory które możesz ze zbioru A za pomocą operacji domknięcia oraz dopełnienia.

Zadanie 5 — (Twierdzenie Kuratowskiego) Niech $(X, \mathcal{O})$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Dla $A \subseteq X$ oznaczamy: $A^o = \mathrm{int}\,(A)$, $A^- = \mathrm{cl}\,(A)$, $A^c = X \setminus A$.

1. Zapisz podstawowe własności operacji $\mathrm{int}\,()$ oraz $\mathrm{cl}\,()$ używając powyższej notacji.
2. Pokaż, że zachodzą następujące zależności (strzałki oznaczają inkluzję)

$$\begin{tikzcd}
& & A^{-o} \arrow[dr] & & \\
A^o \arrow[r] \arrow[ddrr] & A^{o-o} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{-o-} \arrow[r] & A^- \\
& & A^{o-} \arrow[ur] & & \\
& & A \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}$$

3. Pokaż, że $A^{-o-o-} = A^{-o}$ oraz $A^{o-o-} = A^{o-}$.
4. Niech σ będzie dowolnym, skończonym ciągiem operacji ze zbioru $\{-, o, c\}$. Pokaż, że istnieje skończony ciąg operacji τ ze zbioru $\{-, o\}$ taki, że $A^\sigma = A^\tau$ lub $A^\sigma = (A^c)^\tau$.

5. Korzystając z poprzednich punktów udowodnij twierdzenie Kuratowskiego o 14 zbiorach.

Zadanie 6 — Zbiór A nazywamy zbiorem *regularnym otwartym* jeśli $A^{-o} = A$.

1. Podaj przykłady zbiorów otwartych, które nie są regularnymi otwartymi.
2. Pokaż, że dla dowolnego zbioru A zbiór A^{-o} jest regularnym otwartym.
3. Pokaż, że jeśli U, V są zbiorami regularnymi otwartymi, to $U \cap V$ jest regularny otwarty.

UWAGA: Przyjmujemy następującą definicję brzegu zbioru A: $\partial(A) = \mathrm{cl}\,(A) \cap \mathrm{cl}\,(A^c)$ (w literaturze znaleźć można inne, ale równoważne, definicje) .

Zadanie 7 — Niech A będzie dowolnym podzbiorem ustalonej przestrzeni topologicznej X.

1. Pokaż, że zbiory $\mathrm{int}\,(A), \partial(A), \mathrm{int}\,(A^c)$ są parami rozłączne oraz, że ich suma jest równa X.
2. Pokaż, że $\mathrm{int}\,(A) = A \setminus \partial(A)$.
3. Pokaż, że $\mathrm{cl}\,(A) = A \cup \partial(A)$.
4. Pokaż, że $\partial(A) = \mathrm{cl}\,(A) \setminus \mathrm{int}\,(A)$.
5. Pokaż, że $\partial(\partial(A)) \subseteq \partial(A)$.

Zadanie 8 — Niech $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Rozważamy przestrzeń metryczną (X, d), gdzie d jest obcięciem metryki euklidesowej w $\mathbb{R}^2$ do zbioru X (czyli $d = d_{eucl} \restriction_{X \times X}$). Niech $B = B((0, 0), 1)$. Wyznacz $\mathrm{int}\,(B)$, $\mathrm{cl}\,(B)$ oraz $\partial(B)$.

Zadanie 9 — Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $p \in X$. Pokaż, że dla dowolnego $r > 0$ mamy

$$\partial(\{x \in X : d(x, p) < r\}) \subseteq \{x \in X : d(x, p) = r\} \ .$$

Zadanie 10 — Rozważamy kostkę Hilberta $H = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ z metryką $d(x, y) = \sum\limits_n \frac{|x(n)-y(n)|}{2^n}$.

1. Niech $A = (0, 1)^{\mathbb{N}}$. Oblicz $\mathrm{int}\,(A)$, $\mathrm{cl}\,(A)$ oraz $\partial(A)$.
2. Niech $D = \{x \in H : (\forall n \in \mathbb{N})(x(n) \in \mathbb{Q}) \wedge (\exists n)(\forall k > n)(x(k) = 0)\}$. Wyznacz moc zbioru D oraz oblicz $\mathrm{cl}\,(D)$.

Zadanie 11 — Pracujemy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową. Niech $B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{k}) : n, k \in \mathbb{N}^+\}$.

1. Wyznacz zbiór $C = \mathrm{cl}\,(B)$.
2. Wyznacz zbiory C^d, $(C^d)^d$ oraz $((C^d)^d)^d$.

Zadanie 12 — Wyznacz operacje wnętrza i domknięcia w następujących przestrzeniach topologicznych:

1. $(A, \{\emptyset, A\})$
2. $(A, P(A))$
3. $S = (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\})$ (przestrzeń Sierpińskiego)

Zadanie 13 — Ustalamy zbiór X oraz rozbicie $\mathcal{P}$ zbioru X. Definiujemy $\mathcal{O}_{\mathcal{P}} = \{\bigcup S : S \subseteq \mathcal{P}\}$.

1. Pokaż, że $(X, \mathcal{O}_{\mathcal{P}})$ jest to przestrzeń topologiczna.
2. Wyznacz operacje wnętrze i domknięcia w tej przestrzeni.
3. Ile różnych zbiorów możesz wyznaczyć za pomocą operacji domknięcia i dopełnienia z ustalonego zbioru $A \subseteq X$?

Zadanie 14 — **(Topologia co-skończona)** Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Niech $\mathcal{O} = \{A^c : A \subseteq X \wedge |A| < \aleph_0\}$.

1. Pokaż, że $(X, \mathcal{O})$ jest przestrzenią topologiczną.
2. Pokaż, że topologia $\mathcal{O}$ nie jest generowana przez żadną metrykę na zbiorze X.
3. Wyznacz operacje wnętrza i domknięcia w tej topologii.

Zadanie 15 — Pokaż, że przestrzenie l_2, kostka Hilberta oraz przestrzeń Baire'a są ośrodkowe.

Zadanie 16 — Rozważamy przestrzeń metryczną jeż $J_X = \{0\} \cup (X \times (0, 1])$ indeksowaną zbiorem X. Dla jakich zbiorów X przestrzeń J_X jest ośrodkowa?

Zadanie 17 — Niech d będzie metryką na zbiorze X. Określamy funkcję

$$\tilde{d}(x, y) = \min(d(x, y), 1) \ .$$

1. pokaż, że $\tilde{d}$ jest metryką na X
2. Pokaż, że metryki d i $\tilde{d}$ są równoważne.

* **Zadanie 18** — Pokaż, że waga linii Sorgenfrey'a jest równa continuum.
Wskazówka: Załóż, że $\mathcal{B}$ jest bazą linii Sorgenfrey'a mocy mniejszej od continuum. Niech $L = \{\inf(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Zauważ, że $|L| < \mathfrak{c}$. Weź $a \in \mathbb{R} \setminus L$. Pokaż, że zbioru $[a, a+1)$ nie możesz przedstawić jako sumy podrodziny $\mathcal{B}$.

Zadanie 19 — Pokaż, że ośrodkowe przestrzenie metryczne spełniają II aksjomat przeliczalności.

2 Funkcje ciągłe

Zadanie 20 — Niech $|X| \geqslant 2$. Niech $\mathcal{X} = (X, \{\emptyset, X\})$.

1. Niech $\mathcal{Y}$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Opis wszystkie ciągłe z $\mathcal{Y}$ do $\mathcal{X}$.
2. Opisz wszystkie funkcje ciągłe z przestrzeni $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$ w zbiór $\mathbb{R}$.

Zadanie 21 — Opisz wszystkie funkcje ciągłe z przestrzeni $\mathbb{R} \times (X, P(X))$ w zbiór $\mathbb{R}$.

Zadanie 22 — Niech $X = (0, 1) \cup (2, 3)$ oraz $|Z| \geqslant 2$. Opisz funkcje ciągłe z X w przestrzeń topologiczną $(Z, P(Z))$.

Zadanie 23 — Niech $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge n \geqslant 1\}$. Zbiór X traktujemy jako przestrzeń metryczną z metryką odziedziczoną z z naturalnej metryki z $\mathbb{R}$.

1. Opisz funkcje ciągłe z X w $\mathbb{R}$.
2. Opisz funkcje ciągłe z $X \times X$ w $\mathbb{R}$.

Zadanie 24 — Niech $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ będą przestrzeniami topologicznymi. Niech $f = (f_1, f_2) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$. Pokaż, że f jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy obie funkcje f_1 i f_2 są ciągłe.

Zadanie 25 — Niech $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{W}$ będą przestrzeniami topologicznymi. Niech $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{W}$ będzie ciągła.

1. Niech $a \in X$ oraz $g(y) = f(a, x)$. Pokaż, że g jest ciągła.
2. Przypomnij sobie przykład (z Analizy Matematycznej II) funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ która nie jest ciągła ale dla każdego $a \in \mathbb{R}$ obie funkcje $\lambda y \to f(a, y)$ oraz $\lambda x \to f(x, a)$ są ciągłe.

Zadanie 26 — Niech (X, d_1) i (Y, d_2) są przestrzeniami metrycznymi. Niech $a \in X$ oraz niech $f : X \to Y$. Pokaż, że funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall A \subseteq X)(a \in \overline{A} \to f(a) \in \overline{f(A)}]) \ .$$

Zadanie 27 — Niech $T_1 = (X, \mathcal{O}_X)$ i $T_2 = (Y, \mathcal{O}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Załóżmy, że T_2 jest przestrzenią Hausdorffa. Załóżmy, że $A \subseteq X$ jest gęstym podzbiorem X. Niech $f, g : T_1 \to T_2$ będą ciągłe. Pokaż, że jeśli $f \upharpoonright A = g \upharpoonright A$ to $f = g$.

Zadanie 28 — Pokaż, że przestrzeń topologiczna $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O})$ jest przestrzenią Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy przekątna $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ jest domkniętym podzbiorem $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

C.D.N.

Powodzenia,
Jacek Cichoń