

Lista zadań do wykładu z Algorytmiki

Jacek Cichoń

PWr ★ WIT ★ 2026



1 Przestrzenie unormowane

Zadanie 1

Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy wypukłym jeśli

$$(\forall P, Q \in A)(\forall t \in [0, 1])(tP + (1 - t)Q \in A).$$

Dla skończonego zbioru $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathbb{R}^n$ definiujemy

$$\text{conv}(\mathcal{P}) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i : \alpha_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

Zbiór ten nazywamy otoczką wypukłą zbioru $\mathcal{P}$.

1. Pokaż, że $\mathcal{P} \subseteq \text{conv}(\mathcal{P})$.
2. Pokaż, że $\text{conv}(\mathcal{P})$ jest zbiorem wypukłym.
3. Pokaż, że $\text{conv}(\mathcal{P})$ jest zbiorem domkniętym.
4. Pokaż, że $\text{conv}(\mathcal{P})$ jest najmniejszym wypukłym zbiorem domkniętym który zawiera $\mathcal{P}$.

Zadanie 2

Ustalmy $x \in \mathbb{R}^n$. Pokaż, że $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. **Wskazówka:** Rozważ najpierw przypadek $n = 2$.

Zadanie 3

Dwie normy $\|\bullet\|_*$ i $\|\bullet\|_+$ na tej samej przestrzeni wektorowej V nazywamy równoważnymi jeśli istnieją takie stałe $c, d > 0$, że

$$(\forall x \in V)(c\|x\|_* \leq \|x\|_+ \leq d\|x\|_*).$$

Pokaż, że relacja równoważności norm jest relacją równoważności.

Zadanie 4

Założmy, że normy $\|\bullet\|_*$ i $\|\bullet\|_+$ na tej samej przestrzeni wektorowej V są równoważne. Definiujemy $d_*(x, y) = \|x - y\|_*$ oraz $d_+(x, y) = \|x - y\|_+$. Niech $(x_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem elementów V oraz niech $x \in V$. Pokaż, że następujące zdania są równoważne:

1. $\lim_n d_*(x_n, x) = 0$
2. $\lim_n d_+(x_n, x) = 0$

Przeanalizuj konsekwencje tego faktu.

Zadanie 5

Założmy, że $1 \leq p < q$.

1. Pokaż, że $l^p \subseteq l^q$.
2. Pokaż, że $l^q \setminus l^p \neq \emptyset$. **Wskazówka:** Skorzystać możesz z tego, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ oraz, że jeśli $\epsilon > 0$ to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} < \infty$.
3. Pokaż, że l^p nie jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni l^q .
4. Pokaż, że przestrzeń l^p jest gęstą podprzestrzenią l^q .

Zadanie 6

Niech M będzie zupełną podprzestrzenią przestrzeni Banacha V , czyli, że jeśli ciąg (x_n) elementów M jest ciągiem Cauchy'ego to jego granica należy do M . Pokaż, że M jest domkniętym podzbiorem V .

Zadanie 7

Niech M będzie skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni Banacha V . Pokaż, że M jest domknięty w V .

Wskazówka: Niech $n = \dim(M)$. Ustal dowolny izomorfizm $T : K^n \rightarrow M$ (gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$). Korzystając z tego, że dowolne dwie normy na K^n są izomorficzne wywnioskuj, że T jest ciągłe. Wywnioskuj z tego, że M jest zupełna.

Zadanie 8

Niech $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem

$$A((x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Wyznacz $\|A\|$ w normach l^2 oraz porównaj tę normę z normą Kroneckera.

Zadanie 9

Niech $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie zadane wzorem

$$T((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1, -2x_2, x_3, \dots)$$

Wyznacz normę operatorową $\|T\|_p$ dla $p = 1, 2, \infty$.

Zadanie 10

Niech $T : l^2 \rightarrow l^2$ będzie zadane wzorem

$$T((x_1, x_2, x_3, x_4 \dots)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Wyznacz $\|T\|$.

Zadanie 11

Niech $T : l^\infty \rightarrow l^\infty$ będzie zadane wzorem

$$T((x_1, x_2, x_3, x_4 \dots)) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \dots)$$

Wyznacz normę operatora $\|T\|$. **Wskazówka:** Zauważ, że $|x_{n+1} - x_n| \leq 2\|x\|_\infty$.

Zadanie 12

Niech $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ będzie zadane wzorem

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Wyznacz normę operatora $\|T\|$ w normie supremum. **Wskazówka:** Zauważ, że $|T(f)(x)| \leq x\|f\|_\infty$.

Zadanie 13

Potraktujmy l^2 jako przestrzeń liniową (tzn. zapomnijmy o normie i topologii). Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą tej przestrzeni. Jest to zbiór nieskończony (bo l^2 nie jest skończenie wymiarowa). Ustalmy ciąg $(b_n)_{n \geq 1}$ parami różnych elementów bazy $\mathcal{B}$. Możemy założyć, że $\|e_n\| = 1$ (dlaczego?). Rozważmy funkcję $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(b) = \begin{cases} n & : b = b_n \\ 0 & : b \in \mathcal{B} \setminus \{b_n : n \geq 1\} \end{cases}$$

Niech F będzie rozszerzeniem funkcji f do funkcjonału liniowego na l^2 . Niech $x_n = \frac{1}{n}b_n$.

1. Pokaż, że $\|x_n\| = \frac{1}{n}$ i wywnioskuj z tego, że $\lim_n x_n = 0$.
2. Pokaż, że $F(x_n) = 1$ dla każdego $n \geq 1$
3. Wywnioskuj z tego, że funkcjonał $F : l^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieciągły.

Zadanie 14

Dlaczego każdy funkcjonał liniowy na przestrzeni unormowanej skończenie wymiarowej jest ciągły?

2 Przestrzenie Hilberta

Zadanie 15

Niech H będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oraz normą $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

1. Pokaż, że $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
2. Załóżmy, że $\langle x, y \rangle = 0$. Pokaż, że $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.

Zadanie 16

Na przestrzeni $C([0, 1])$ funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$ definiujemy iloczyn

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt .$$

1. Pokaż, że spełnia on wszystkie własności iloczynu skalarnego.

2. Czy jest to przestrzeń Hilberta?

Zadanie 17

Niech H będzie przestrzenią Hilberta oraz niech $u, v \in H$. Załóżmy, że $(\forall x \in H)(\langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle)$. Pokaż, że wtedy $u = v$.

Zadanie na laboratorium 1

Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z normą l^p . Losujemy dwa punkty X, Y z kuli jednostkowej $B(0, 1)$. Interesuje nas wartość oczekiwana odległości $d_{n,p} = E[\|X - Y\|_p]$.

1. Wyznacz eksperymentalnie wartości $d_{2,p}$ dla kilkunastu wartości $p \geq 1$ i postaw hipotezę o postaci tej funkcji.
2. Dla trzech wartości $p = 1, p = 2$ oraz $p = \infty$ zbadaj eksperymentalnie $d_{n,p}$ dla $n \geq 1$.

Zadanie na laboratorium 2

Wylosuj z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ kilka punktów $X_1, \dots, X_k$. Dla każdego z nich oblicz normy $\|X_i\|_p$ dla kilkunastu wartości $p \geq 1$.

1. Przyjrzyj się otrzymanym wynikom i postaw jakąś rozsądną hipotezę.
2. Spróbuj tę hipotezę udowodnić.

Zadanie na laboratorium 3

Rozważamy wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

1. Napisz funkcję normalizującą wektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. Napisz funkcję obliczającą $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ dla wektorów $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
3. Oprogramuj procedurę implementującą procedurę ortonormalizacji Grama-Schmidta dla podanego ciągu wektorów $(\vec{x}_k)_{k=1, \dots, m}$ wektorów z $\mathbb{R}^n$.
4. Oprogramuj procedurę wyznaczania rzutu ortogonalnego wektora $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ na podprzestrzeń M generowaną przez układ wektorów $\{f_1, \dots, f_k\} \subset \mathbb{R}^n$ i sprawdź czy $p_M(p_M(\vec{x})) = p_M(\vec{x})$ oraz, że $\langle \vec{x} - p_M(\vec{x}), p_M(\vec{x}) \rangle = 0$.

c.d.n.

Powodzenia,

Jacek Cichoń