

#### Grupa 1. Trygonometria

**Zadanie 1.** Pokaż, że jeśli  $z \in \mathbb{C}$  oraz  $|z| = 1$  to  $z^{-1} = \bar{z}$ . Jak się nazywał w szkole średniej ten fakt?

**Zadanie 2.** Podaj możliwie krótkie wyprowadzenie wzoru na  $\cos(2\alpha)$  oraz  $\sin(2\alpha)$ .

**Zadanie 3.** Oblicz

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\alpha), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\alpha).$$

**Zadanie 4.** Zbadaj podstawowe własności pierścienia  $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1)$ .

**Zadanie 5.** Do czego wykorzystywany jest pierścień  $\mathbb{R}[x]/(x^2)$  w Informatyce?

**Zadanie 6.** Zaimplementuj klasę reprezentującą liczbę

$$a + b \cdot j,$$

gdzie  $a, b$  są liczbami rzeczywistymi zaś  $j$  jest takim elementem, że  $j^2 = -1$ . Obsłuż: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, normę definiowaną jako  $N(a + bj) = a^2 + b^2$ .

#### Grupa 2. Wielomiany

IDEA:  $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow (\mathbb{C}[x], +, \cdot)$

**Zadanie 7.** Niech  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Niech  $\epsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ . Pokaż, że

$$\sum_{t=0}^2 f(\epsilon^t x) = \sum_{3|k}^n a_k x^k.$$

**Zadanie 8.** Zastosuj poprzednie zadanie do funkcji  $f(x) = (1 + x)^n$ .

#### Grupa 3. Funkcje tworzące prawdopodobieństwo

Te zadania służą do przypomnienia sobie kilku pojęć z rachunku prawdopodobieństwa.

**Zadanie 9.** Niech  $X$  będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w zbiorze  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Wyznacz funkcję tworzącą  $\phi_X$  zmiennej  $X$ . Za jej pomocą wyznacz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej  $X$ .

**Zadanie 10.** Niech  $X$  będzie zmienną losową o wartościach w zbiorze  $\{1, 2, \dots\}$  o rozkładzie geometrycznym z parametrem  $p$ , czyli  $\Pr[X = n] = p q^{n-1}$ . Wyznacz funkcję tworzącą  $\phi_X$  zmiennej  $X$  i za jej pomocą wyznacz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej  $X$ .

## Grupa 4. Transformata Fouriera

Ustalmy  $N \geq 1$ . Dla  $n = 0, \dots, N-1$  definiujemy wektory

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{N}} [\omega^{nk} : 0 \leq k < N],$$

z przestrzeni  $\mathbb{C}^{\{0,1,\dots,N-1\}}$ , gdzie  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ .

**Zadanie 11.** Oblicz  $\|B_n\|$ .

**Zadanie 12.** Pokaż, że jeśli  $0 \leq n < m < N$  to  $B_n \perp B_m$ .

**Zadanie 13.** Niech  $X \in \mathbb{C}^{\{0,1,\dots,N-1\}}$ . Oblicz  $\langle X, B_n \rangle$  oraz pokaż, że  $X = \sum_{n=0}^{N-1} \langle X, B_n \rangle B_n$

---

**Zadanie 14.** Zaimplementuj transformatę Fouriera. Może to być to być procedura działające w czasie  $O(n^2)$ , gdzie  $n$  to długość ciągu.

## Grupa 5. Monady

W tej grupie zadań chodzi o omówienie metody zanurzania obliczeń  $f : X \rightarrow Y$  w obliczenia  $W(f) : W(X) \rightarrow W(Y)$  za pomocą funkcji  $\tilde{f} : X \rightarrow W(Y)$ .

**Zadanie 15.** Zaimplementuj w C++ strukturę `WriterInt`, przechowującą liczbę całkowitą oraz dziennik wykonanych operacji. Zaimplementuj funkcje `unit`, `bind`, `tell`, a następnie napisz kalkulator wyrażeń arytmetycznych, który oprócz wyniku zwraca pełny ślad obliczeń.

Przetestuj ją na obliczeniach typu  $5 \rightarrow (5 + 2) \rightarrow (5 + 2) \cdot 3 \rightarrow ((5 + 2) \cdot 3)^2$ .

**Zadanie 16.** [Uwaga: lekka zmiana] Oprogramuj sensownie funkcję o sygnaturze

`WriteInt liftA2(WriterInt x, WriterInt y, f)`,

która funkcji  $f : (int, int) \rightarrow WriterInt$  działałaby tak: jeśli na wejściu podamy  $(x, r)$ ,  $(y, s)$  i  $f$  to najpierw obliczmy  $(z, t) = f(x, y)$  i zwracamy  $(z, r++s++t)$ , gdzie  $++$  oznacza konkatencję łańcuchów. Zastosuj ją do śledzenia obliczeń wyznaczania gcd.

#### Grupa 6. Podstawowe własności algebraiczne i metryczne

**Zadanie 17.** Niech  $K$  będzie dowolnym ciałem. Sprawdź starannie, że struktura  $K[[X]]$  jest pierścieniem. Pokaż następnie, że jeśli  $\alpha, \beta \in K[[X]] \setminus \{0\}$ , to  $\alpha \cdot \beta \neq 0$ , czyli, że  $K[[X]]$  jest dziedziną całkowitości. Pokaż, że ciało  $K$  oraz pierścień wielomianów  $K[X]$  są podpierścieniami pierścienia  $K[[X]]$ .

**Zadanie 18.** Niech  $\delta$  oznacza deltę Kroneckera. Zauważ, że  $X = (\delta_{k,1})_{k \geq 0}$ . Pokaż, że  $X^n = (\delta_{k,n})_{k \geq 0}$ .

**Zadanie 19.** Niech  $a \in K$ . Pokaż, że w pierścieniu  $K[[X]]$  mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n X^n = \frac{1}{1 - aX}.$$

**Zadanie 20.** Wyznacz w pierścieniu  $\mathbb{C}[[X]]$  odwrotności multiplikatywne następujących szeregów formalnych:

1.  $1 + X, 1 - X^2, 1 + X^2$

2.  $\exp(X) = \sum_n \frac{1}{n!} X^n$

3.  $1 - X - X^2$ .

**Zadanie 21.** Sformułuj samodzielnie pojęcie izomorfizmu struktur kombinatorycznych oraz pokaż, że

$$(\mathcal{A} \cong \mathcal{B}) \leftrightarrow (\mathcal{A}(X) = \mathcal{B}(X)).$$

**Zadanie 22.** Niech  $\alpha, \beta \in K[[X]]$  oraz  $\alpha_0 \neq 0$ . Załóżmy, że znamy  $n$  pierwszych elementów szeregów  $\alpha$  i  $\beta$ . Napisz w jakimś swoim ulubionym języku programowania algorytmy które wyznaczają  $n$  pierwszych elementów szeregów  $\alpha + \beta$  oraz  $\alpha \cdot \beta$ .