O KOMBINATORYCE ANALITYCZNEJ

Jacek Cichoń
Katedra Informatyki
Wydział Podstawowych Problemów Techniki
Politechnika Wrocławska

OMatKo!!! 2017

7 kwietnia 2017

Współczynniki dwumianowe

Wzór dwumianowy Newtona

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$\sum_{n \geq 0} (1+x)^n y^n = \frac{1}{1-(1+x)y}$$

Twierdzenie

$$\frac{1}{1-(1+x)y} = \sum_{n,k} \binom{n}{k} x^k y^n$$

Współczynniki dwumianowe

Wzór dwumianowy Newtona

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$\sum_{n \geq 0} (1+x)^n y^n = \frac{1}{1-(1+x)y}$$

Twierdzenie

$$\frac{1}{1-(1+x)y} = \sum_{n,k} \binom{n}{k} x^k y^n$$

Klasa kombinatoryczna

Definicja

Klasa kombinatoryczna: para $\mathcal{A} = (A, |\cdot|)$ taka, że

1. $|\cdot| : A \to \mathbb{N}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})(|\{a \in A : |a| = n\}| < \infty)$

Oznaczenia

- $A_n = \{a \in A : |a| = n\}$
- $a_n = |A_n|$
- $\mathcal{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (funkcja tworząca klasy $\mathcal{A}$)
- $[x^n]\left(\sum_n a_n x^n\right) = a_n$

Przykłady

Liczby naturalne

- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, |\cdot|)$, gdzie $|n| = n$
- $N_n = \{n\}$, $|N_n| = 1$
- $\mathcal{N}(x) = \sum_n x^n = \frac{1}{1-x}$

Skończona struktura

- $\mathcal{A} = (\{\circ, \Box\}, |\cdot|)$, gdzie $|\circ| = 1$, $|\Box| = 2$
- $\mathcal{A}(x) = 1 \cdot x + 1 \cdot x^2$

Pusta klasa

- $\mathcal{E} = (\{\varepsilon\}, |\cdot|)$, gdzie $|\varepsilon| = 0$
- $\mathcal{A}(x) = 1 \cdot x^0 = 1$

Przykład

Funkcja tworząca

$$\mathcal{A}(x) = 3 + 2x + 0x^2 + 4x^3 + 2x^4 + \ldots$$

Interpretacja

- mam 3 obiekty rozmiaru 0
- mam 2 obiekty rozmiaru 1
- mam 0 obiektów rozmiaru 2
- ...

Intuicja

- Wielomiany = klasy skończone
- Funkcje wymierne = równania rekurencyjne

Suma klas kombinatorycznych

Definicja (Suma)

Jeśli $\mathcal{A} = (A, |\cdot|_A)$, $\mathcal{B} = (B, |\cdot|_B)$ są klasami kombinatorycznymi oraz $A \cap B = \emptyset$, to $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = (A \cup B, |\cdot|_A \cup |\cdot|_B)$

Twierdzenie

$$(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$$

Dowód.

Niech $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$. Wtedy $C_n = A_n \cup B_n$, więc $c_n = a_n + b_n$, więc

$$\sum_n c_n x^n = \sum_n (a_n + b_n) x^n = \left(\sum_n a_n x^n\right) + \left(\sum_n b_n x^n\right)$$

$\square$

Suma klas kombinatorycznych

Definicja (Produkt)

Jeśli $\mathcal{A} = (A, |\cdot|_A)$, $\mathcal{B} = (B, |\cdot|_B)$ są klasami kombinatorycznymi, to $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (A \times B, |\cdot|)$, gdzie $|(a, b)| = |a|_A + |b|_B$

Twierdzenie

$$(\mathcal{A} \times \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(x) \times \mathcal{B}(x)$$

Dowód.

Niech $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$. Wtedy $C_n = \bigcup_{k=0}^{n}(A_k \times B_{n-k})$, więc $c_n = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cdot b_{n-1})$, więc

$$\sum_n c_n x^n = \sum_n \sum_{k=0}^{n}(a_k \cdot b_{n-k})x^n = \left(\sum_n a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_n b_n x^n\right)$$

□

Zastosowanie

- Wiemy, że $\mathcal{N}(x) = \frac{1}{1-x}$
- Przyglądamy się klasie $\mathcal{A} = \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.
- Mamy $a_n = |\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^2 : a+b+c = n\}|$.

Mamy

$$\mathcal{A}(x) = (\mathcal{N}(x))^3 = \frac{1}{(1-x)^3} = (1-x)^{-3} = \sum_k \binom{-3}{k} (-x)^k .$$

Co to jest ?

$$\binom{-3}{k}$$

Współczynniki dwumianowe

Definicja (Standardowa)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{[n]_k}{k!}, \quad \text{gdzie} \quad [x]_k = \prod_{i=0}^{k-1}(x-k)$$

Definicja (Wielomianowa)

$$\binom{x}{k} = \frac{[x]_k}{k!},$$

Twierdzenie (Górna negacja)

$$\binom{x}{k} = (-1)^k \binom{k-x-1}{k}$$

Zastosowanie - c.d.

$$\mathcal{A}(x) = \sum_k \binom{-3}{k}(-x)^k = \sum_k (-1)^k \binom{k+3-1}{k}(-1)^k x^k =$$

$$= \sum_k \binom{k+2}{k} x^k = \sum_k \binom{k+2}{2} x^k$$

Zatem

$$[x^k]\mathcal{A}(x) = \binom{k+2}{2} .$$

więc

$$|\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 : a+b+c=n\}| = \binom{n+2}{2} .$$

Ciągi

Definicja

Jeśli $\mathcal{A} = (A, |\cdot|_A)$ jest taką klasą kombinatoryczną, że $a_0 = 0$, to

$$SEQ(\mathcal{A}) = \mathcal{E} + \mathcal{A} + (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) + \ldots$$

Twierdzenie

$$SEQ((A))(x) = \frac{1}{1 - \mathcal{A}(a)}$$

Dowód.

$$SEQ((A))(x) = \mathcal{E}(x) + (A)(x) + ((A)(x))^2 + ((A)(x))^3 + \ldots$$

□

Przykłady - sprawdzenie

Liczby naturalne

- $\mathbf{1} = (\{\bullet\}, |\cdot|)$, gdzie $|\bullet| = 1$.
- $\mathbf{1}(x) = x$
- $SEQ(\mathbf{1})(x) = \frac{1}{1-x} = \mathcal{N}(x)$

Ciągi bitów

- $\mathbf{B} = (\{\uparrow, \downarrow\}, |\cdot|)$, gdzie $|\uparrow| = |\downarrow| = 1$.
- $\mathbf{B}(x) = 2x$
- $SEQ(\mathbf{B})(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_n 2^n x^n$

Przykład

Domino

- $\mathbf{D} = (\{\Box, \Box\Box\}, |\cdot|)$, gdzie $|\Box| = 1$, $|\Box\Box| = 2$.
- $\mathbf{D}(x) = x + x^2$
- $SEQ(\mathbf{D})(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$

Liczby Fibbonacciego

- $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
- $\sum_n F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$
- ZATEM $[x^n]SEQ(\mathbf{D})(x) = F_n$

Przykład

Domino

- $\mathbf{D} = (\{\square, \square\square\}, |\cdot|)$, gdzie $|\square| = 1$, $|\square\square| = 2$.
- $\mathbf{D}(x) = x + x^2$
- $SEQ(\mathbf{D})(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$

Liczby Fibbonacciego

- $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
- $\sum_n F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$
- ZATEM $[x^n]SEQ(\mathbf{D})(x) = F_n$

Cykle

Definicja

Jeśli $\mathcal{A} = (A, |\cdot|_A)$ jest taką klasą kombinatoryczną, że $a_0 = 0$, to

$$CYC(\mathcal{A}) = \mathcal{E} + \mathcal{A} + (\mathcal{A} \times \mathcal{A})/\sim + (\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A})/\sim \ldots$$

gdzie

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \sim (b_0, \ldots, b_{n-1}) \equiv (\exists k)(\forall i)(b_i = a_{(i+k \mod n)})$$

Twierdzenie

$$CYC(\mathcal{A})(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{k} \ln \frac{1}{1 - \mathcal{A}(x^k)}$$

Przykład

Naszyjniki

- $\mathbf{A} = (\{\star, \diamond\}, |\cdot|)$, gdzie $|\star| = 1$, $|\diamond| = 1$.
- $\mathbf{A}(x) = 2x$
- Niech $\mathcal{C} = CYC(\mathbf{A})$

$$[x^5]\mathcal{C}(x) = [x^5]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi(k)}{k}\ln\frac{1}{1-2x^k} = (\star)$$

Korzystamy ze wzoru: $\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}x^m$

$$(\star) = [x^5]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi(k)}{k}\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}(2x^k)^m = [x^5]\sum_{k\geq 1}\sum_{m\geq 1}\frac{\phi(k)}{k}\frac{1}{m}2^m x^{km}$$

Naszyjniki-cd

Mamy

$$(5 = k \cdot m) \equiv ((k,m) = (1,5) \vee (k,m) = (5,1))$$

więc

$$[x^5] \sum_{k,m \geq 1} \frac{\phi(k)}{km} 2^m x^{km} = \frac{\phi(1)}{1 \cdot 5} 2^5 + \frac{\phi(5)}{5 \cdot 1} 2^1 =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 32 + \frac{4}{10} \cdot 2 = 8$$

Drzewa Binarne

Definicja rekurencyjna

$$\mathbf{T} = \{\bullet\}(\mathcal{E} + \mathbf{T} \times \mathbf{T})$$

$$\mathbf{T}(x) = x(1 + \mathbf{T}(x)^2)$$

Twierdzenie (Lagrange Inversion Theorem)

Załóżmy, że $f(x) = x\phi(f(x))$, *gdzie* ϕ *jest analityczna w otoczeniu* 0 *oraz* $\phi(0) \neq 0$. *Wtedy*

$$[x^n]f(x) = \frac{1}{n}[u^{n-1}](\phi(u))^n$$

Drzewa Binarne - cd

$$\mathbf{T}(x) = x(1 + \mathbf{T}(x)^2)$$

Stosujemy LIT do funkcji $\phi(x) = 1 + x^2$

$$\frac{1}{n}[u^{n-1}](1+u^2)^n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{2k}$$

więc

$$t_n = \begin{cases} \frac{1}{n}\binom{n}{\frac{n-1}{2}} & n \text{ jest nieparzysta} \\ 0 & \text{jest parzysta} \end{cases}$$

Szkic dowodu LIT

Dowód.

Jeśli $T(x) = \sum_n t_n x^n$, to $T'(x) = \sum_n n t_n x^{n-1}$. Więc

$$n t_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\epsilon} \frac{T'(z)}{z^n} dz = (*)$$

Podstawiamy $u = T(z)$. Mamy $du = T'(z)dz$. Z tego, że $T(z) = z\phi(T(z))$ otrzymujemy $u = z\phi(u)$, więc

$$(*) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\phi(u)^n}{u^n} du = [u^{n-1}](\phi(u))^n.$$

□

ANALYTIC COMBINATORICS

PHILIPPE FLAJOLET, ROBERT SEDGEWICK

Cambridge University Press, 2009

DZIĘKUJĘ

jacek.cichon@pwr.edu.pl

ANALYTIC COMBINATORICS

PHILIPPE FLAJOLET, ROBERT SEDGEWICK

Cambridge University Press, 2009

DZIĘKUJĘ

jacek.cichon@pwr.edu.pl