Wstęp do Informatyki i Programowania

Lista nr 2
9 i 11 października

Jak reprezentować liczby rzeczywiste?

Zacznijmy od reprezentacji binarnej ułamków. Podobnie jak w systemie dziesiętnym korzystamy z ujemnych potęg dziesiątki po przecinku, tak tu będziemy rozważali binarne rozwinięcia ułamków za pomocą ujemnych potęg dwójki. Zatem po kropce binarnej, oddzielającej część całkowitą od ułamkowej, kolejne pozycje będą odpowiadały bitom reprezentującym kolejno wartości $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\ldots$. Liczba $\frac{1}{2}$ będzie zatem miała przedstawienie 0.1, liczba $\frac{1}{4}$ będzie miała przedstawienie 0.01 a liczba $\frac{3}{4}$ będzie miała przedstawienie 0.11.

Co jednak z mianownikami niebędącymi potęgami dwójki? W systemie dziesiętnym mamy podobny problem. Jeśli jedynymi dzielnikami mianownika są 5 i 2, to otrzymujemy skończone rozwinięcie ułamka. W przeciwnym razie rozwinięcia są nieskończone i dla liczb wymiernych okresowe.

Skoro nie da się dokładnie reprezentować wartości wymiernych w komputerze (skończona liczba cyfr), trzeba się pogodzić z ich przybliżaniem. Robimy to za pomocą zaokrąglania, przy czym reguły są bardzo proste: jeżeli mamy ochotę zaokrąglić na k-tej pozycji, to patrzymy się na następną cyfrę i jeśli jest ona zerem, to po prostu cały ogon odrzucamy (zaokrąglenie w dół), a jeśli jest jedynką, to dodajemy ją do uciętego na k-tym miejscu przybliżenia (zaokrąglenie w górę).

We współczesnych komputerach właściwie bez wyjątku stosuje się zapis zmiennopozycyjny. W zapisie tym podajemy kilka cyfr znaczących oraz określamy rząd wielkości poprzez podanie o ile należy je przesunąć w lewo lub w prawo. Przy takim przedstawieniu cyfry znaczące nazywamy mantysą, a potęgę podstawy obrazującą, o ile należy przesunąć przecinek dziesiętny - cechą.

Musimy rozwiązać jeszcze jeden mały problem. Sposobów przedstawienia konkretnej wartości jest nieskończenie wiele. Na przykład liczbę $\frac{3}{8}$ można przedstawić jako $\frac{3}{16} \cdot 2^1 = \frac{3}{8} \cdot 2^0 = \frac{3}{4} \cdot 2^{-1} = \frac{3}{2} \cdot 2^{-2}$.

Niewygodne byłoby używać kilku reprezentacji tej samej wartości. Stąd pomysł, żeby wybrać jedną z nich jako standardową i zapamiętywać wartości w takiej znormalizowanej postaci. Powszechnie przyjmuje się, że dobieramy tak mantysę, aby jej wartość mieściła się w przedziale $[\frac{1}{2}, 1)$.

Każdą niezerową liczbę rzeczywistą reprezentujemy za pomocą przybliżenia wymiernego w postaci trójki (z, m, c), gdzie z określa znak liczby (np. 0 dla dodatnich a 1 dla ujemnych), m jest mantysą należącą do przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$ a c wykładnikiem potęgi.

Ponieważ mantysa jest z przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$ to pierwszym bitem po przecinku jest zawsze 1, więc możemy go nie pamiętać. Z kolei dla cechy chcemy mieć wartości zarówno dodatnie jak i ujemne, więc rozpatrujemy jej wartości najczęściej w przedziale od -2^{u-1} do $2^{u-1} - 1$, gdzie u oznacza liczbę bitów cechy.

> Rozpatrzmy teraz system liczb zmiennoprzecinkowych o 8 bitach: 1 bit znaku, 3 bity mantysy $m_2m_1m_0$ i 4 bity cechy $c_3c_2c_1c_0$. Liczba tak zapisana będzie miała więc wartość
>
> $$(0.1m_2m_1m_0)_2 \cdot 2^{(c_3c_2c_1c_0)_2-8}.$$

Zadanie 1

Zapisz największą i najmniejszą liczbę w tym systemie. Napisz najmniejszą liczbę dodatnią i największą ujemną. Podaj ich dokładne wartości w systemie dziesiętnym. Czy można zapisać w tym systemie 0?

Zadanie 2

Ile liczb można wyrazić w tym systemie. Jak są one rozłożone (jakie są odległości między nimi)? Czy wszystkie liczby całkowite między największą a najmniejszą można zapisać w tym systemie?

Zadanie 3

Zapisz w tym systemie liczby $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{7}{128}$, 17 i 127. Ile wynoszą błędy zaokrągleń dla tych liczb?

Zadanie 4

Jak wygląda algorytm dodawania liczb w tym systemie? Wykonaj następujące dodawania $1 + 4$, $\frac{1}{10} + \frac{7}{128}$ i $1 + 17$. Czy wyniki mają błędy?

Zadanie 5

Jak wygląda algorytm mnożenia liczb w tym systemie? Wykonaj następujące mnożenia $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$, $\frac{7}{128} \cdot 48$ i $\frac{1}{3} \cdot 3$. Co można powiedzieć o błędach wyników?

Zadanie 6

O ile może zmienić się wartość cechy gdy zaokrąglamy wartość mantysy? Czy może to wygenerować konieczność kolejnego zaokrąglenia?