

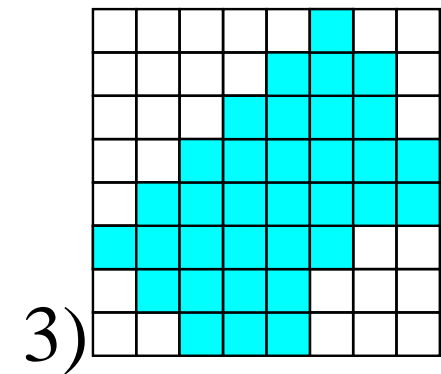
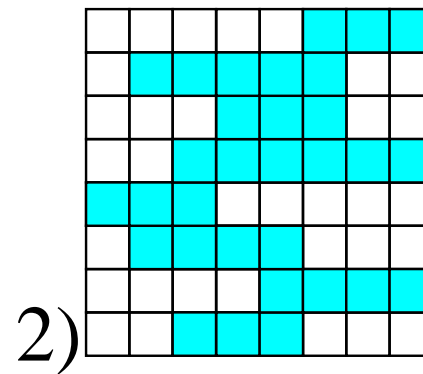
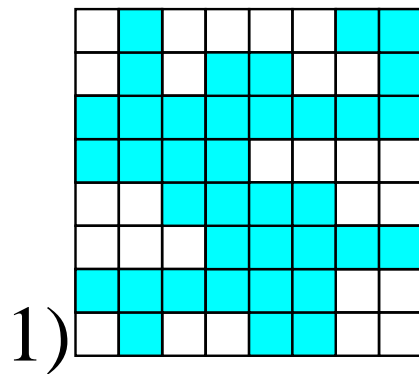
Rekonstrukcja poliomin wypukłych

Maciej Gębala

Promotor: prof. Leszek Pacholski

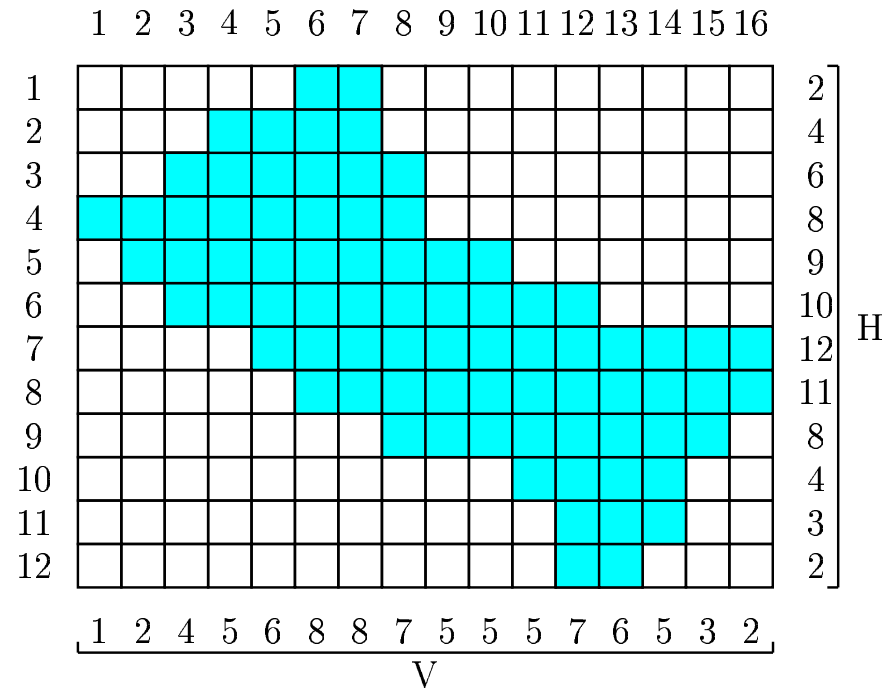
Co to jest poliomino?

Poliomino - *spójny* zbiór pól na szachownicy o rozmiarze $m \times n$.



1. poliomino
2. poliomino ze spójnymi wierszami
3. wypukłe poliomino (spójne wiersze i kolumny)

Rzuty prostopadłe



Wektor rzutów poziomych $H \in \{1, \dots, 16\}^{12}$

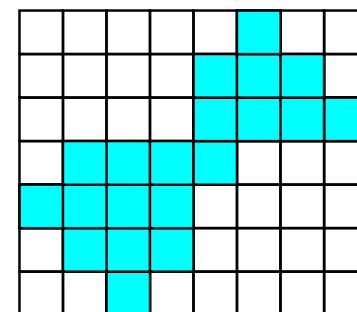
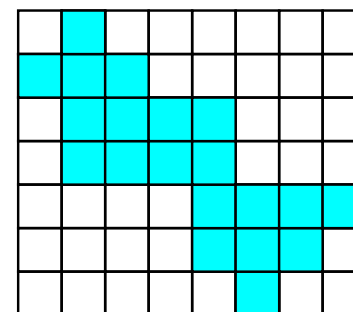
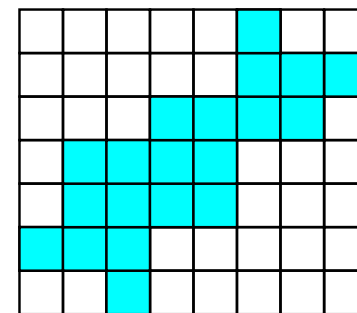
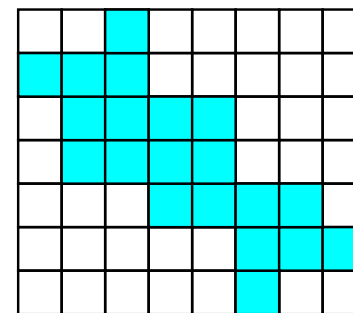
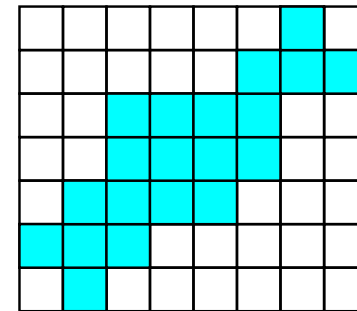
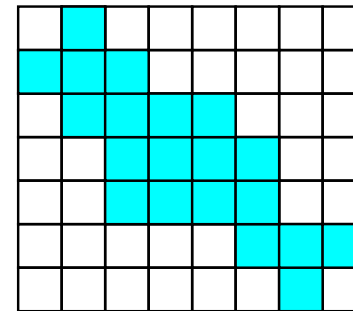
Wektor rzutów pionowych $V \in \{1, \dots, 12\}^{16}$

Niejednoznaczność

Sześć wypukłych poliomin o identycznych wektorach rzutów prostopadłych

$$H = (1, 3, 4, 4, 4, 3, 1)$$

$$V = (1, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$$

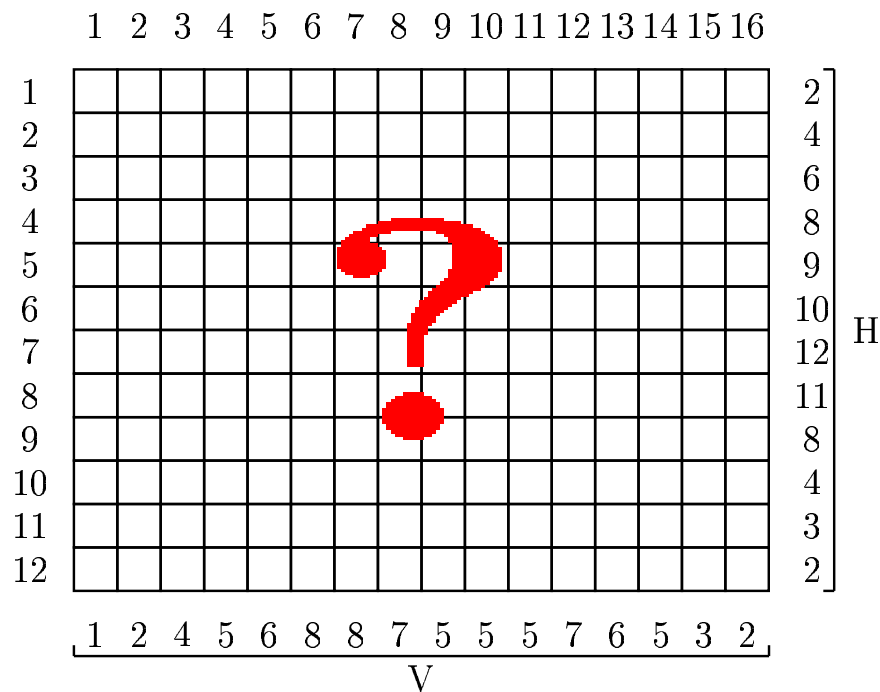


Problem rekonstrukcji

Czy istnieje wypukłe poliomino o ustalonych wektorach rzutów poziomych i pionowych

$$H \in \{1, \dots, n\}^m \text{ i}$$

$$V \in \{1, \dots, m\}^n \text{ ?}$$



Tomografia dyskretna

Rekonstrukcja skończonych zbiorów dostępnych za pomocą ich dyskretnych rzutów.

Problemy:

- ile i jakie kierunki prześwietleń charakteryzują nam zbiory jednoznacznie?
- ile kolorów w zbiorze możemy wyróżnić?
- jakie klasy zbiorów są „łatwo” rekonstruowalne?

Wyniki - NP-zupełność

- poliomina (bez żadnych dodatkowych warunków)
Woeginger (1996)
- poliomina ze spójnymi wierszami (kolumnami)
Barcucci, Del Lungo, Nivat, Pinzani (1996)
- dowolne zbiory ze spójnymi wierszami
(kolumnami)
Barcucci, Del Lungo, Nivat, Pinzani (1996)
- dowolne zbiory ze spójnymi wierszami
i kolumnami
Woeginger (1996)

Zbiory bez żadnych warunków na spójność są
rekonstruowalne w czasie wielomianowym
Ryser (1963)

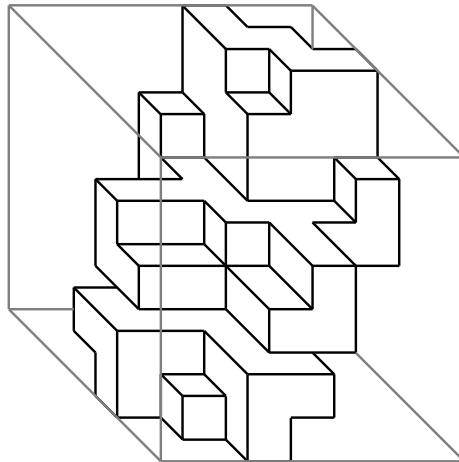
Wyniki - poliomina wypukłe

Złożoność problemu rekonstrukcji dwuwymiarowych poliomin wypukłych dla dokładnych rzutów

- Barcucci, Del Lungo, Nivat, Pinzani (1996)
 $O(n^4m^4)$
- Gębala (1998) (**Twierdzenie 1**)
 $O(\min(n^2, m^2) \cdot mn \log mn)$
- Chrobak, Dürr (1999)
 $O(\min(n^2, m^2) \cdot mn)$

Wypukłe poliomino 3D

Każdy prostopadły przekrój jest 2-wymiarowym poliominem wypukłym



$$P_T$$

	1						n
1	0	0	0	2	3	1	0
	0	0	0	1	4	2	1
	0	2	2	2	3	4	3
	1	2	3	3	2	1	2
	2	2	2	3	2	0	0
	0	1	2	2	2	0	0
n	0	0	2	1	0	0	0

$$P_S$$

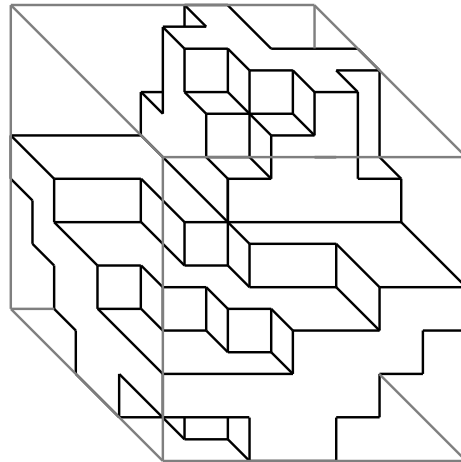
	1						n
1	1	2	2	0	0	0	0
	2	3	3	0	0	0	0
	2	1	3	1	0	0	0
	1	2	5	4	1	1	0
	0	0	3	4	2	2	0
	0	0	0	4	4	2	2
n	0	0	0	1	4	2	1

$$P_F$$

	1						n
1	0	0	0	0	2	2	1
	0	0	0	0	3	3	2
	0	0	0	1	3	1	2
	0	1	1	4	5	2	1
	0	2	2	4	3	0	0
	2	2	4	4	0	0	0
n	1	2	4	1	0	0	0

Pełne poliomino wypukłe 3D

Wypukłe poliomino 3D z co najmniej jedną macierzą rzutów nie zawiera zer.



$$P_T$$

	1						n
1	1	1	2	3	1	1	
	2	2	2	4	3	1	1
	2	1	2	3	3	3	3
	3	2	2	3	3	4	2
	2	3	2	2	2	2	1
	1	2	3	2	1	2	2
n	1	1	2	3	2	2	1

$$P_S$$

	1						n
1	1	2	3	1	0	0	0
	3	4	4	2	0	0	0
	2	2	4	4	0	0	0
	4	4	2	5	4	2	2
	0	3	3	4	5	4	3
	0	0	1	2	3	4	5
n	0	0	0	1	2	2	2

$$P_F$$

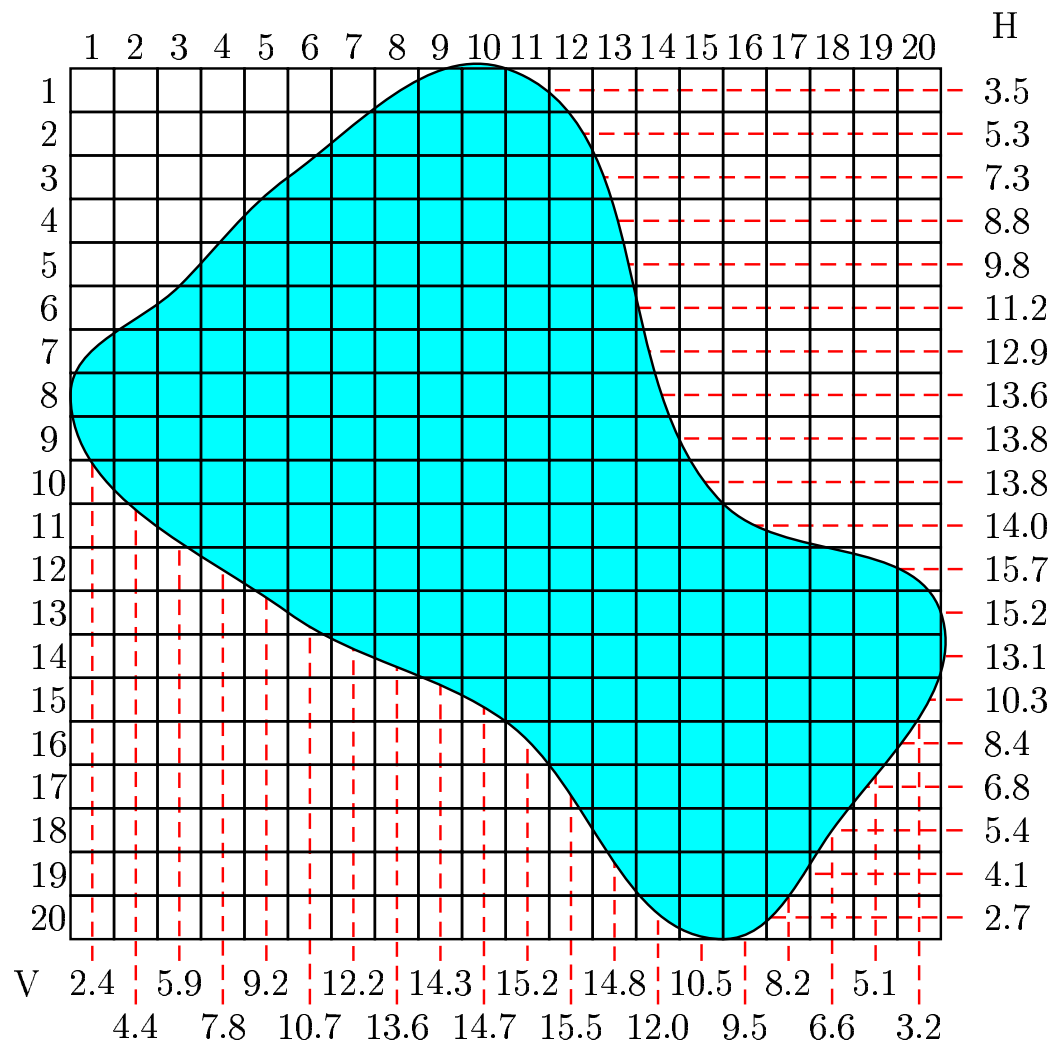
	1						n
1	0	0	0	1	3	2	1
	0	0	0	2	4	4	3
	0	0	0	4	4	2	2
	2	2	4	5	2	4	4
	3	4	5	4	3	3	0
	5	4	3	2	1	0	0
n	2	2	2	1	0	0	0

Wyniki - poliomina 3D

Twierdzenie 2

Problem rekonstrukcji trójwymiarowych pełnych poliomin wypukłych z rzutów prostopadłych może być rozwiązany w czasie $O(n^7 \log n)$.

Rzuty przybliżone w 2D



Przybliżenia rzutów

- Przybliżenie z błędem absolutnym
wartość rzutu rekonstrukcji różni się co najwyżej o 1 od wartości wejściowej
- Przybliżenie z błędem logarytmicznym
wartość rzutu rekonstrukcji różni się co najwyżej o $\log x + 1$ od wartości wejściowej

Wyniki

Twierdzenie 3

Problemy rekonstrukcji poliomin, poliomin ze spójnymi wierszami oraz poliomin ze spójnymi kolumnami z przybliżonych rzutów prostopadłych są **NP-zupełne**.

Twierdzenie 4

Problem rekonstrukcji wypukłych poliomin z przybliżonych rzutów prostopadłych może być rozwiązany w czasie $O(n^3m^3)$ (dla dowolnej funkcji błędu).

Dowody twierdzeń

Twierdzenia 1 i 2 - algorytmy rozwiązujące te problemy w podanym czasie.

Twierdzenie 3 - wykazanie, że rekonstrukcja poliomin z przybliżonych rzutów jest trudniejsza niż z rzutów dokładnych.

Twierdzenie 4 - redukcja problemu do problemu spełnialności formuł 2CNF.

Problem spełnialności formuł 2CNF

Literał to zmienna zdaniowa lub jej negacja.

Klauzula to alternatywa jednego lub więcej literałów.

Zdaniowa formuła logiczna jest w postaci CNF (koniunkcyjnej normalnej), jeśli jest zapisana jako koniunkcja klauzul.

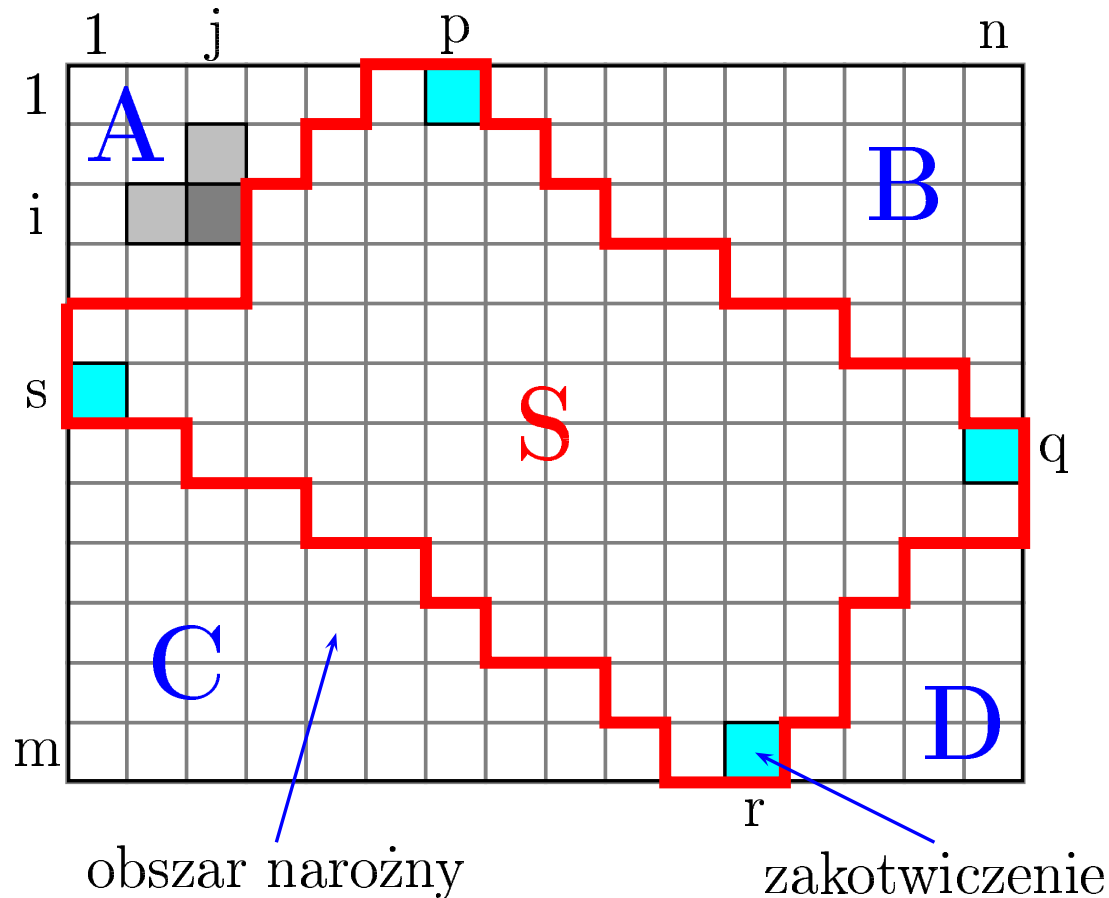
Formuła jest postaci 2CNF, jeśli każda klauzula zawiera co najwyżej dwa literały.

Przykład: $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee \neg z)$

Istnieje algorytm liniowy względem długości formuły rozwiązujący problem spełnialności 2CNF.

Własności poliomin wypukłych

$$(i, j) \in A \Rightarrow (i - 1, j) \in A \wedge (i, j - 1) \in A$$



Wypukłe poliomino S zakotwiczone w (p, q, r, s) .

Redukcja do problemu spełnialności formuł 2CNF

Mamy (H, V) - wektory rzutów poziomych i pionowych.

Dla każdego $p, r \in \{1, \dots, n\}$ i $q, s \in \{1, \dots, m\}$ zbudujemy formułę $F_{p,q,r,s}(H, V)$ taką, że

$F_{p,q,r,s}(H, V)$ jest spełnialna \iff istnieje poliomino wypukłe spełniające rzuty przybliżone (H, V) i zakotwiczone w (p, q, r, s) .

Własności formuł

Długość formuł

$$|F_{p,q,r,s}(H, V)| = O(mn)$$

Ilość formuł

$$m^2 n^2$$

Własności poliomin wypukłych

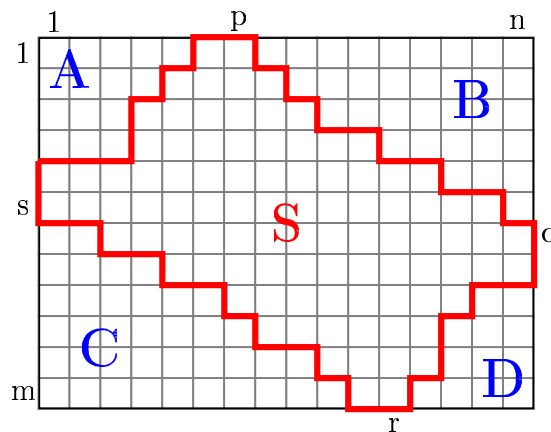
Lemat [Chrobak & Dürr]

S jest wypukłym poliominem \iff

$$S = \overline{A \cup B \cup C \cup D},$$

gdzie **A**, **B**, **C**, **D** są rozłącznymi obszarami narożnymi takimi, że

1. $(i - 1, j - 1) \in A \Rightarrow (i, j) \notin D$,
2. $(i - 1, j + 1) \in B \Rightarrow (i, j) \notin C$.



Dopuszczalne wartości rzutów

$$H = (h_1, \dots, h_m) \quad V = (v_1, \dots, v_n)$$

\check{v}_j i \hat{v}_j - minimalna i maksymalna dopuszczalna wartość j-tego rzutu pionowego

$$\check{v}_j = \max\{1, \lceil v_j - f(v_j) \rceil\}$$
$$\hat{v}_j = \min\{m, \lfloor v_j + f(v_j) \rfloor\}$$

\check{h}_i i \hat{h}_i - minimalna i maksymalna dopuszczalna wartość i-tego rzutu poziomego

$$\check{h}_i = \max\{1, \lceil h_i - f(h_i) \rceil\}$$
$$\hat{h}_i = \min\{m, \lfloor h_i + f(h_i) \rfloor\}$$

Formuła 2CNF

Kodowanie przynależności pola do obszaru

$$X_{i,j} = 1 \text{ (prawda)} \iff (i, j) \in X$$

$$X_{i,j} = 0 \text{ (fałsz)} \iff (i, j) \notin X$$

$$F_{p,q,r,s}(H, V) = Cor \wedge Con \wedge Anc_{p,q,r,s} \\ \wedge LBC \wedge UBC_{p,r} \wedge LBR \wedge UBR_{q,s}$$

Opis formuły

Cor - obszary narożne z własności rogów;

Con - spójność z Lematu Chrobaka i Dürra;

$Anc_{p,q,r,s}$ - własność zakotwiczenia w (p,q,r,s) ;

LBC - minimalne odległości między obszarami narożnymi w kolumnach (zależne od \check{v}_j);

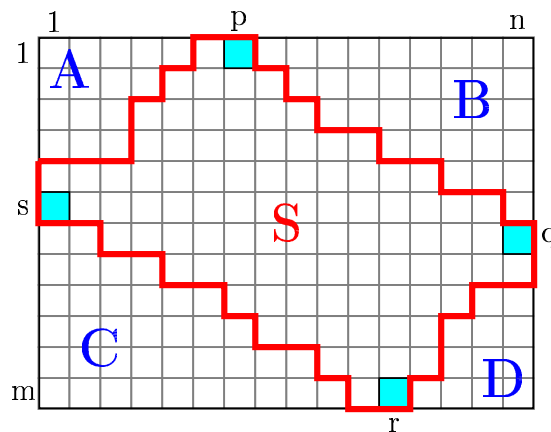
$UBC_{p,r}$ - maksymalne odległości między obszarami narożnymi w kolumnach (zależne od \hat{v}_j);

LBR - minimalne odległości między obszarami narożnymi w wierszach (zależne od \check{h}_i);

$UBR_{q,s}$ - maksymalne odległości między obszarami narożnymi w wierszach (zależne od \hat{h}_i);

Budowa formuły

$$Con = \bigwedge_{i,j} \left\{ \begin{array}{l} A_{i,j} \Rightarrow \neg D_{i+1,j+1} \\ B_{i,j} \Rightarrow \neg C_{i+1,j-1} \end{array} \right\}$$



$$Anc_{p,q,r,s} = \bigwedge \left\{ \begin{array}{cccc} \neg A_{1,p} & \neg B_{1,p} & \neg C_{1,p} & \neg D_{1,p} \\ \neg A_{q,n} & \neg B_{q,n} & \neg C_{q,n} & \neg D_{q,n} \\ \neg A_{m,r} & \neg B_{m,r} & \neg C_{m,r} & \neg D_{m,r} \\ \neg A_{s,1} & \neg B_{s,1} & \neg C_{s,1} & \neg D_{s,1} \end{array} \right\}$$

Budowa formuły

$$UBC_{p,r} = \bigwedge_i \left\{ \begin{array}{l} \bigwedge_{j \leq \min\{p,r\}} \neg A_{i,j} \Rightarrow C_{i+\hat{v}_j,j} \\ \bigwedge_{p \leq j \leq r} \neg B_{i,j} \Rightarrow C_{i+\hat{v}_j,j} \\ \bigwedge_{r \leq j \leq p} \neg A_{i,j} \Rightarrow D_{i+\hat{v}_j,j} \\ \bigwedge_{\max\{p,r\} \leq j} \neg B_{i,j} \Rightarrow D_{i+\hat{v}_j,j} \end{array} \right\}$$

