Algorytmy i struktury danych
Lista 4

Zadanie 1.
Rozważ tablicę różnych elementów o rozmiarze $n = 1000$ i dwa następujące scenariusze wyboru pivota:

- wybierz losową wartość z tej tablicy jako pivot,
- wybierz losowe trzy wartości z tej tablicy, a za pivota podstaw medianę tej trójki.

Dla obu przypadków wylicz eksperymentalnie i zaprezentuj na wykresach prawdopodobieństwo, że procedura PARTITION wygeneruje podział tablicy w proporcjach α do $1 - \alpha$, dla stałej $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ (w praktyce przyjmij $\alpha = [0.01, 0.5]$ z krokiem 0.01). Postaraj się dopasować funkcje zależne od α dla wygenerowanych wykresów.

Zadanie 2.
Rozważ wyszukiwanie elementu x w posortowanej tablicy $A[1, \ldots, n]$ o różnych elementach. Wiemy, że może zostać do tego użyty algorytm Binary-Search, który ma złożoność obliczeniową $O(\log n)$. Pokaż, że w "comparison model“ (czyli można zadawać tylko pytania w stylu: czy $A[i] \geq z$?), wyszukiwane jest $\Omega(\log n)$.

Zadanie 3.
Niech $X[1 \ldots n]$ i $Y[1 \ldots n]$ będą dwiema posortowanymi tablicami. Podaj algorytm, który w czasie $O(\lg n)$ wyznacza medianę wszystkich $2n$ elementów z obu tablic.

Zadanie 4.
Nieporządkiem w ciągu $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy każdą parę indeksów (i, j) taką, że $i < j$ oraz $a_i > a_j$. Ułóż algorytm obliczający liczbę nieporządków w danym ciągu n-elementowym.

Zadanie 5.
Czy algorytm SELECT powinien mieć polską nazwę "magiczne piątki"? Odpowiedź uzasadnij sprawdzając jaką złożoność miała by zmodyfikowana wersja SELECT'a, która w kroku wyszukiwania mediany median:

- dzieli tablice na $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ trójek,
- dzieli tablice na $\lceil \frac{n}{7} \rceil$ siódemek.

Zadanie 6.
Dla zadanych n liczb w przedziale $[0, k)$ zaprojektuj procedurę preprocessingową mającą złożoność $O(n + k)$, która następnie pozwoli odpowiadać na pytanie: ile spośród wejściowych n liczb jest w przedziale $[a, b]$, mającą złożoność $O(1)$.

Zadanie 7.
Podaj nierekurencyjny algorytm wypisujący klucze drzewa BST w porządku in-order.

Zadanie 8.
Pokaż, że w drzewie BST jeśli wierzchołek ma dwóch synów, to jego następnik nie ma lewego syna, a jego poprzednik nie ma prawego syna.

Zadanie 9.
Drzewo nazywamy zbalansowanym, jeśli w pesymistycznym przypadku ma wysokość asymptotycznie logarytmiczną względem liczby wierzchołków. Które z powyższych warunków implikują zbalansowanie? Udowodnij lub podaj kontrprzykład.

1. Każdy węzeł ma dwóch synów lub jest liściem.

2. Rozmiar każdego poddrzewa jest nieparzysty.

3. Istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego wierzchołka $x \in T$ jego większe poddrzewo ma co najwyżej C razy więcej wierzchołków od jego mniejszego poddrzewa.

4. Istnieje stała $c > 0$ taka, że dla każdego wierzchołka $x \in T$ wysokość jego poddrzew różni się najwyżej o c.

Zadanie 10.
Pokaż wykonanie dla drzew czerwono-czarnych oraz BST wstawiania kolejno kluczy $41, 38, 31, 12, 19, 8$ do początkowo pustego drzewa.

Zadanie 11.
Pokaż wykonanie dla drzew czerwono-czarnych oraz BST usuwania z drzew z powyższego zadania kolejno kluczy $8, 12, 19, 31, 38, 41$.