Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2024/25

LISTA 2

Zadania na tej liście zaczerpnięte są z podręczników [AMO93, DPV06].

Zadanie 0. Przeczytaj rozdział 1.3 (Applications) z podręcznika [AMO93] omawiający przykładowe zastosowania przepływów w sieciach do modelowania i rozwiązywania problemów optymalizacyjnych z różnych dziedzin. Zajrzyj także do rozdziału 19.10, gdzie zaprezentowana jest dużo obszerniejsza lista zastosowań[1] (część z nich omawiana jest nieco dokładniej w rozdziale 19).

Zadanie 1. Sformułuj zadanie znajdowania najkrótszych ścieżek w sieci $G = (N, A)$ z wyróżnionego wierzchołka $s \in N$ do wszystkich wierzchołków $i \in N \setminus \{s\}$ jako zagadnienie najtańszego przepływu.

Zadanie 2. Sformułuj problem najkrótszej ścieżki oraz problem przydziału jako problem cyrkulacji (por. rozdział 1.2 w [AMO93]).

Zadanie 3. Rozważmy wariant problemu transportowego, w którym suma zapotrzebowań odbiorców (d_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$) jest większa od podaży dostawców (s_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$), tj. $\sum_{j \in \{1,\ldots,n\}} d_j > \sum_{i \in \{1,\ldots,m\}} s_i$ – jest to tzw. problem niezrównoważony. Wprowadźmy karę p_j za każdą jednostkę niezrealizowanego popytu na towar u j-tego odbiorcy. Sformułuj problem jako standardowy problem transportowy, tj. problem, w którym suma zapotrzebowań u odbiorców jest równa sumie podaży u dostawców.

Zadanie 4. Uczestnicy konferencji naukowej idą na wspólną kolację. Aby zwiększyć możliwość bliższego poznania się postanowili, że przy jednym stole będą siedziały tylko osoby z różnych uczelni. Załóżmy, że mamy p uczelni, gdzie z i-tej uczelni, $i \in \{1, \ldots, p\}$, jest a_i uczestników. Ponadto załóżmy, że dostępnych jest q stołów, gdzie j-ty stół, $j \in \{1, \ldots, q\}$, ma b_j miejsc. Znajdź rozmieszczenie uczestników konferencji przy stołach, aby osiągnąć cel bliższego poznania się – o ile takie rozmieszczenie istnieje dla zadanych danych. Sformułuj problem jako zagadnienie najtańszego przepływu.

Zadanie 5. Policja w małym miasteczku ma w swoim zasięgu trzy dzielnice oznaczone jako p_1, p_2 i p_3. Każda dzielnica ma przypisaną pewną liczbę radiowozów. Policja pracuje w systemie trzyzmianowym. W tabelach 1 i 2 podane są minimalne i maksymalne liczby radiowozów dla każdej zmiany.

Tabela 1: Minimalne liczby radiowozów dla każdej zmiany i dzielinicy

	zmiana 1	zmiana 2	zmiana 3
p_1	2	4	3
p_2	3	6	5
p_3	5	7	6

Tabela 2: Maksymalne liczby radiowozów dla każdej zmiany i dzielinicy

	zmiana 1	zmiana 2	zmiana 3
p_1	3	7	5
p_2	5	7	10
p_3	8	12	10

Aktualne przepisy wymuszają, że dla zmiany 1, 2 i 3 powinno być dostępnych, odpowiednio, co najmniej 10, 20 i 18 radiowozów. Ponadto dzielnice p_1, p_2 i p_3 powinny mieć przypisane, odpowiednio, co najmniej 10, 14 i 13 radiowozów. Policja chce wyznaczyć przydział radiowozów spełniający powyższe wymagania i minimalizujący ich całkowitą liczbę. Sformułuj ten problem jako problem cyrkulacji.

[1] Na tym kursie będziemy się zajmować jedynie wybranymi spośród zagadnień omówionych w tej książce.

Zadanie 6. Rozważmy wariant problemu MIN COST FLOW, w którym suma zasobów jest nie mniejsza niż suma zapotrzebowań w sieci $G = (N, A)$, tj. $\sum_{i\in N} b(i) = B \geqslant 0$. Zredukuj ten problem do „standardowego" wariantu problemu MIN COST FLOW podanego na wykładzie, w którym suma zasobów jest równa sumie zapotrzebowań, tj. $\sum_{i\in N} b(i) = 0$.

Zadanie 7. W problemie BIPARTITE MAXIMUM CARDINALITY MATCHING celem jest wyznaczenie skojarzenia o największym rozmiarze (czyli o największej liczbie krawędzi) dla danego nieskierowanego grafu dwudzielnego $G = (V_1 \cup V_2, E)$. Zredukuj tej problem do problemu maksymalnego przepływu (MAXIMUM FLOW). HINT: Najpierw spróbuj samodzielnie znaleźć redukcję, a dopiero potem ewentualnie zajrzyj do rozdziału 12.3 w [AMO93].

Zadanie 8. (*Redukcja problemu* CIRCUIT VALUE *do* LINEAR PROGRAMMING)
Siecią boolowską (logiczną) $C = C(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy rodzinę połączonych bramek logicznych, składającą się z n bramek wejściowych odpowiadających zmiennym boolowskim $x_1, \ldots, x_n$ oraz m bramek logicznych AND, OR oraz NOT (jedna z nich jest bramką wyjściową z sieci). Bramka NOT ma jedno wejście i jedno wyjście, a bramki OR i AND mają dwa wejścia i jedno wyjście[2].

W problemie CIRCUIT VALUE dana jest sieć logiczna $C = C(x_1, \ldots, x_n)$ oraz wartościowanie zmiennych wejściowych $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \{0, 1\}^n$ i pytamy się, czy wartością na wyjściu sieci C dla wejścia π będzie 1 (jest to równoważne obliczeniu wartości na wyjściu sieci $C(\pi)$).

Pokaż, że dla każdej instancji $\langle C, \pi\rangle$ problemu CIRCUIT VALUE możemy skonstruować w czasie wielomianowym względem jej rozmiaru egzemplarz problemu programowania liniowego, z rozwiązania którego można odczytać wartość na wyjściu sieci $C(\pi)$.

Podaj przykład takiego egzemplarza problemu programowania liniowego dla sieci $C(x_1, x_2, x_3)$ odpowiadającej formule logicznej $\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$ i wejścia $\pi = (0, 1, 1)$.

HINT: Dla każdej bramki sieci g stwórz zmienną decyzyjną o dziedzinie ciągłej $0 \leqslant x_g \leqslant 1$ reprezentującą jej wyjście i – w zależności od typu bramki – dodaj odpowiednie ograniczenia na wartość x_g w zależności od wartości wejściowych (równania i nierówności liniowe; bramki wejściowe mają ustaloną wartość zależną od podanego wejścia π). Sformułuj ograniczenia tak, żeby w rozwiązaniu dopuszczalnym zmienne decyzyjne mogły przyjmować tylko wartości 0 lub 1, będące poprawnym wyjściem bramek logicznych. W przypadku dalszych wątpliwości możesz zajrzeć do rozdziału 7.7 w [DPV06].

Wskazówka do zadań W pewnych przypadkach wygodniej jest przejść z zadania, w którym minimalizujemy funkcję celu, do zadania, w którym maksymalizujemy funkcję celu. Warto tutaj zauważyć, że zbiory rozwiązań optymalnych następujących problemów optymalizacyjnych:

$$\min_{x\in F} c(x) \qquad \text{oraz} \qquad \max_{x\in F} -c(x)$$

są identyczne (F oznacza tu – jak zwykle – zbiór rozwiązań dopuszczalnych).

Literatura

[AMO93] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1993.

[DPV06] Sanjoy Dasgupta, Christos H. Papadimitriou, and Umesh Vazirani. *Algorithms*. McGraw-Hill, Inc., USA, 1st edition, 2006.

[2]Taką sieć możemy modelować jako skierowany graf acykliczny, którego wierzchołki odpowiadają bramkom, a krawędzie – połączeniom między nimi.