Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2024 / 25

LISTA 4

Zadania na tej liście zaczerpnięte są m. in. z [AMO93, Bea, DPV06].

Zadanie 0. Przeczytaj rozdział 4.2 (Shortest Paths: Label-Setting Algorithms → Applications) z podręcznika [AMO93] omawiający kilka przykładów wykorzystania wariantów problemu najkrótszej ścieżki do rozwiązywania wybranych problemów optymalizacyjnych.

Zadanie 1. Problem wydawania reszty polega na wydaniu reszty $p \in \mathbb{N}$ przy użyciu monet (banknotów) o zadanych nominałach $a_1, \ldots, a_k$. Na przykład, jeśli $k = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, to reszty 8, 12 i 54 mogą być wydane przy użyciu takich nominałów, natomiast reszta $p = 4$ nie może być wydana.

(a) Dla zadanego przedziału $[l, u]$, $l, u \in \mathbb{N}$, i nominałów $a_1, \ldots, a_k$ zaproponuj metodę wyznaczania wszystkich liczb należących do $[l, u]$, które mogą być wydane przy użyciu nominałów $a_1, \ldots, a_k$. Sprowadź ten problem do problemu osiągalności wierzchołków z pewnego ustalonego wierzchołka w nieważonym skierowanym grafie acyklicznym.

(b) Dla zadanej reszty p i nominałów $a_1, \ldots, a_k$ zaproponuj metodę wydawania reszty p przy użyciu minimalnej liczby nominałów – o ile resztę p da się wydać. Sprowadź ten problem do problemu najkrótszej ścieżki w nieważonym skierowanym grafie acyklicznym.

(c) Sformułuj problem z podpunktu (b) za pomocą programowania całkowitoliczbowego.

Zadanie 2. System składu tekstu TEX używa procedury do podziału akapitu na wiersze w taki sposób, że kiedy wiersze są wyrównywane do lewego i prawego marginesu (justowane), wygląd akapitu jest atrakcyjny. Przypuśćmy, że akapit składa się z n słów i każde słowo ma przyporządkowany numer $i \in \{1, \ldots, n\}$ odpowiadający kolejności słowa w akapicie. Niech a_{ij} odpowiada atrakcyjności wiersza, jeżeli ten zaczyna się od słowa o numerze i, a kończy się na słowie o numerze $j-1$. System TEX korzysta z pewnej procedury do obliczania każdej wartości a_{ij}. Mając obliczone a_{ij}, zaproponuj metodę rozwiązania problemu podziału akapitu na wiersze tak, aby zmaksymalizować całkowitą atrakcyjność akapitu. Sformułuj problem jako zagadnienie najdłuższej ścieżki w ważonym acyklicznym grafie skierowanym.

Zadanie 3. Firma transportowa przygotowuje plan wypożyczania środków transportu z określonego źródła na okres pięciu lat. Firma może wypełniać swoje zobowiązania wypożyczając nowy środek transportu na początku roku 1 i korzystając z niego do rozpoczęcia j-tego roku, $j \in \{2, \ldots, 6\}$. Jeżeli $j < 6$, to firma zwraca dany środek transportu na początku roku j, korzystając z nowo wypożyczonego środka transportu do rozpoczęcia k-tego roku, $k \in \{j+1, \ldots, 6\}$. Koszty eksploatacji środków transportu w latach 1, 2, 3, 4, 5 są odpowiednio równe 1, 3, 6, 10 i 15 jednostek. Ponadto, jeżeli na początku roku 1 firma wypożycza dany środek transportu na okres jednego, dwóch, trzech, czterech lub pięciu lat, to opłaty za wypożyczenie wynoszą odpowiednio 5, 9, 13, 16 i 19 jednostek. Opłaty te wzrastają z roku na rok o jedną jednostkę. Dla przykładu, jeżeli na początku roku 3 środek transportu zostaje wypożyczony na okres jednego, dwóch lub trzech lat, to związane z tym opłaty wynoszą odpowiednio 7, 11 lub 15 jednostek. Wyznacz optymalną strategię firmy, tj. plan wypożyczania o najtańszym koszcie. Sformułuj ten problem jako problem wyznaczania najkrótszej ścieżki w ważonym acyklicznym grafie skierowanym.

Zadanie 4. Zapoznaj się z metodą ścieżki krytycznej (ang. *Critical Path Method*, CPM) – zobacz np. [Bea, SDK99, RW12]. Rozważ model czynności na łuku (*activity on arc*). Przeanalizuj sposób wyznaczania charakterystyk projektowych (najwcześniejszy moment zakończenia projektu, wyznaczenie ścieżek i czynności krytycznych, momentów rozpoczęcia czynności, rezerw czasowych itp.) w kontekście problemu najkrótszej (najdłuższej) ścieżki w ważonym acyklicznym grafie skierowanym.

Rozważmy projekt składający się z 10 zadań, dla których czasy trwania (w tygodniach) i zależności kolejnościowe przedstawia poniższa tabela.

Zadanie	Zadania poprzedzające	Czas trwania
1	–	2
2	–	3
3	$1, 2$	4
4	$1, 2$	1
5	2	2
6	2	3
7	6	1
8	3	2
9	$4, 5, 7$	4
10	6	2

(a) Narysuj sieć reprezentującą model czynności na łuku dla tego projektu. Dla wszystkich węzłów wyznacz czasy najwcześniejszego i najpóźniejszego rozpoczęcia (*earliest/latest start time*) oraz oblicz minimalny czas potrzebny do realizacji projektu.

(b) Oblicz rezerwy czasowe (*float*) dla każdego z zadań, a następnie wyznacz czynności krytyczne i zidentyfikuj ścieżkę krytyczną.

(c) Jak zmieni się najwcześniejszy moment zakończenia projektu, jeśli:
   i) czas trwania zadania 1 wzrośnie o 2 tygodnie,
   ii) zadanie 10 zostanie zakończone tydzień wcześniej niż planowano,
   iii) realizacja zadania 6 przedłuży się o 2 tygodnie.

Zadanie 5. Rozważmy skierowaną sieć z dodatnimi długościami łuków i ustalonym węzłem s. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe, a które fałszywe? Uzasadnij swoje odpowiedzi.

(a) Jeśli wszystkie łuki w sieci mają różne długości, to istnieje tylko jedno drzewo najkrótszych ścieżek od węzła s.

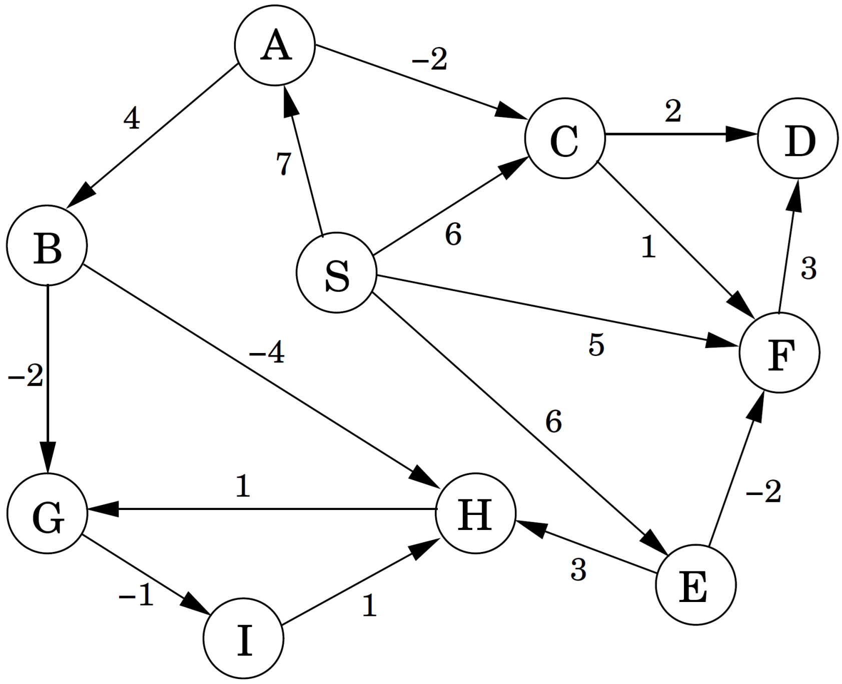
(b) Jeśli pominiemy skierowanie łuków w sieci (łuki staną się krawędziami nieskierowanymi), to najkrótsze odległości od s nie zmienią się.

(c) Spośród wszystkich najkrótszych ścieżek algorytm Dijkstry znajdzie ścieżkę o najmniejszej liczbie łuków.

Zadanie 6. Łuk w sieci nazywamy *najbardziej istotnym*, jeśli jego usuniecie powoduje największy wzrost długości najkrótszej ścieżki między dwoma ustalonymi wierzchołkami s i t. Rozważmy sieć z dodatnimi długościami łuków. Skonstruuj algorytm wyznaczania łuku najbardziej istotnego. Jaki jest czas działania zaproponowanego algorytmu?

Zadanie 7. (*Przyspieszenie alg. Diala*) Niech $c_{\min} = \min\{c_{ij} : (i, j) \in A\}$ i $w = \max\{1, c_{\min}\}$. Rozważmy implementację algorytmu Diala, w której kubełki mają szerokość w (w klasycznej implementacji szerokość kubełków wynosi $w = 1$). Pokaż, że zmodyfikowany algorytm nigdy nie zmniejszy etykiet wierzchołków, które znajdują się w pierwszym napotkanym niepustym kubełku (niepusty kubełek o najmniejszym indeksie). W konsekwencji każdy wierzchołek z tego kubełka można zaetykietować na stałe (permanentnie). Jaki jest czas działania tak zmodyfikowanego algorytmu Diala?

Zadanie 8. (*„Zaległe" zadanie 2 z listy 8 z AiSD*) Przedstaw działanie wybranego algorytmu wyznaczającego najkrótsze ścieżki (spośród omówionych na wykładzie) dla grafu z rys. 1 i źródła S. Podaj długości tych ścieżek oraz narysuj drzewo najkrótszych ścieżek wyznaczone przez algorytm.



Rysunek 1: Graf do zadania 8. Źródło: [DPV06].

Literatura

[AMO93] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1993.

[Bea] John E. Beasley. OR-Notes. Network analysis. `https://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/netanal.html`. Operations research notes by prof. J. E. Beasley.

[DPV06] Sanjoy Dasgupta, Christos H. Papadimitriou, and Umesh Vazirani. *Algorithms*. McGraw-Hill, Inc., USA, 1st edition, 2006.

[RW12] Kenneth A. Ross and Charles R.B. Wright. *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2012.

[SDK99] Maciej M. Sysło, Narsingh Deo, and Janusz S. Kowalik. *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku Pascal*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999.