Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2024 / 25

LISTA 5

Zadania na tej liście zaczerpnięte są m.in. z podręczników [AMO93, DPV06].

Zadanie 1. *(Modyfikacje problemu* MAX FLOW*)*

(a) Podaj transformację problemu maksymalnego przepływu w sieci z wieloma źródłami i wieloma ujściami do problemu maksymalnego przepływu w sieci z jednym źródłem i jednym ujściem.

(b) Załóżmy, że w problemie maksymalnego przepływu węzły sieci (poza źródłem i ujściem) mają ograniczoną pojemność, tj. dane są dodatkowe ograniczenia górne na wielkość przepływu wchodzącego do węzłów. Przekształć ten problem do „standardowego" problemu MAX FLOW.

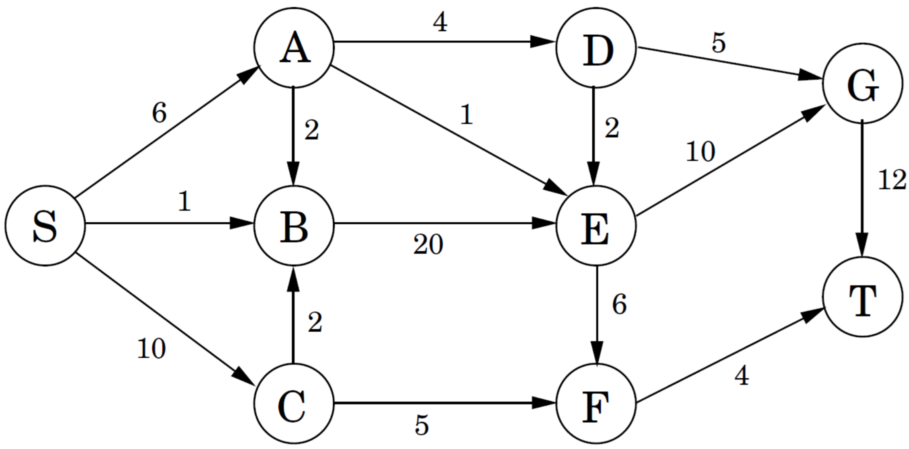
(c) Pokaż, że jeśli dodamy dowolną liczbę łuków wchodzących do źródła s oraz dowolną liczbę łuków wychodzących z ujścia t o dowolnych pojemnościach, to wartość maksymalnego przepływu nie zmieni się.

(d) Załóżmy, że w sieci $G = (N, A)$ pewne łuki mają nieskończoną pojemności, ale nie istnieje ścieżka od źródła do ujścia o nieskończonej pojemności. Niech A° oznacza zbiór łuków o skończonych pojemnościach. Pokaż, że możemy zastąpić nieskończoną pojemność każdego łuku $(i,j) \in A \setminus A^\circ$ skończoną pojemnością M taką, że $M \geqslant \sum_{(i,j)\in A^\circ} u_{ij}$ i nie będzie to miało wpływu na wartość maksymalnego przepływu.

Zadanie 2. Rozważmy problem wyznaczania rozwiązania *dopuszczalnego* (jeśli istnieje) problemu najtańszego przepływu w sieci $G = (N, A)$ bez ograniczeń dolnych na pojemność łuków, tj. $l_{ij} = 0$ dla każdego $(i,j) \in A$. Sformułuj powyższy problem jako zagadnienie maksymalnego przepływu.

Zadanie 3. Sformułuj problem z zadania 4. z listy 2 (rozmieszczenie uczestników konferencji przy stołach pozwalające na bliższe poznanie się) jako zagadnienie maksymalnego przepływu.

Zadanie 4. Przedstaw działanie algorytmu Edmondsa-Karpa wyznaczającego maksymalny przepływ ze źródła S do ujścia T dla grafu z rys. 1. Podaj ścieżki powiększające wybierane w poszczególnych krokach algorytmu oraz otrzymywane sieci residualne. Na koniec znajdź minimalny przekrój odpowiadający wyznaczonemu przepływowi.



Rysunek 1: Graf do zadania 4. Etykiety krawędzi oznaczają ich pojemność. Źródło: [DPV06]

Zadanie 5. *(Bezpośrednie wyznaczanie skojarzenia o największym rozmiarze w grafie dwudzielnym)* W zadaniu 7. z listy 2 pokazaliśmy, jak znaleźć skojarzenie o największym rozmiarze w grafie dwudzielnym poprzez redukcję do problemu maksymalnego przepływu. Celem tego zadania jest opracowane bezpośredniego algorytmu.

Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie nieskierowanym grafem dwudzielnym i niech $M \subseteq E$ będzie skojarzeniem w G. Wierzchołek u nazywamy **pokrytym** przez M, jeśli M zawiera krawędź incydentną z u. **Ścieżką alternującą** nazywamy ścieżkę o nieparzystej liczbie krawędzi, która zaczyna się i kończy w niepokrytych wierzchołkach i której kolejne krawędzie naprzemiennie należą do $E \setminus M$ oraz M.

(a) Pokaż, że M jest skojarzeniem o największym rozmiarze w grafie dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje ścieżka alternująca względem M.

(b) Podaj algorytm, który dla danego grafu dwudzielnego oraz skojarzenia M znajduje ścieżkę alternującą względem M w czasie $\mathrm{O}(|V| + |E|)$. HINT: Użyj wariantu BFS.

(c) Zaprojektuj algorytm, który w oparciu o wyznaczane ścieżki alternujące znajduje skojarzenie o największym rozmiarze w grafie dwudzielnym w czasie $\mathrm{O}(|V| \cdot |E|)$.

HINT: Wskazówki można znaleźć np. w rozdziale 25.1 w [CLRS22].

Zadanie 6. Rozważmy wersję **minimaksową** zadania transportowego w sieci $G = (N, A)$ z funkcją celu postaci $\max\{c_{ij}x_{ij} \colon (i,j) \in A\}$ (w klasycznej wersji funkcja celu ma postać $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$). W wersji minimaksowej szukamy więc przepływu $(x_{ij})_{(i,j)\in A}$ o wartościach całkowitych (reprezentującego plan transportu między dostawcami i odbiorcami), który **minimalizuje** $\max\{c_{ij}x_{ij} \colon (i,j) \in A\}$.

(a) Rozważmy zrelaksowaną (poluźnioną) wersję minimaksowego zadania transportowego, w której dla ustalonego parametru λ chcemy wiedzieć, czy istnieje przepływ $(x_{ij})_{(i,j)\in A}$ o wartościach całkowitych spełniający warunek $\max\{c_{ij}x_{ij} \colon (i,j) \in A\} \leqslant \lambda$. Sprowadź tak zrelaksowany problem do problemu maksymalnego przepływu.

(b) Użyj wyniku z punktu (a) do skonstruowania algorytmu dla minimaksowego zadania transportowego. HINT: Zastosuj przeszukiwanie binarne.

Literatura

[AMO93] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1993.

[CLRS22] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 4th edition, 2022.

[DPV06] Sanjoy Dasgupta, Christos H. Papadimitriou, and Umesh Vazirani. *Algorithms*. McGraw-Hill, Inc., USA, 1st edition, 2006.