Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2024/25

LABORATORIUM 2

Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe

Termin realizacji: **ostatnie zajęcia przed 20.11.2024 r.**

Warunek zaliczenia listy: *realizacja co najmniej czterech spośród zadań 1–6 (wraz ze sprawozdaniem).*

W każdym z zadań 1 – 6 zapisz model programowania liniowego w wybranym języku i rozwiąż go za pomocą solvera `GLPK` (lub np. `Cbc`, ...). Rozwiązania należy uogólnić, tj. oddzielić model od danych tak, aby można było zadawać dane w pliku, na podstawie których solver będzie generował egzemplarz problemu i go rozwiązywał. Należy także maksymalnie sparametryzować zapis modelu.

Zadanie 0.
Przeczytaj opis języka `GNU MathProg` (lub np. pakietu `JuMP` z języka `Julia`) i zapoznaj się z jego możliwościami.

Zadanie 1. [3 pkt]
Przedsiębiorstwo lotnicze musi podjąć decyzję o zakupie paliwa do samolotów odrzutowych, mając do wyboru trzech dostawców. Samoloty tankują paliwo regularnie na czterech lotniskach, które obsługują.

Firmy paliwowe poinformowały, że mogą dostarczyć następujące ilości paliwa w nadchodzącym miesiącu: Firma 1 – 275 000 galonów, Firma 2 – 550 000 galonów i Firma 3 – 660 000 galonów. Niezbędne ilości paliwa na poszczególnych lotniskach są odpowiednio równe: na lotnisku 1 – 110 000 galonów, na lotnisku 2 – 220 000 galonów, na lotnisku 3 – 330 000 galonów i na lotnisku 4 – 440 000 galonów.

Koszt jednego galonu paliwa w $ (z uwzględnieniem kosztów transportu) dostarczonego przez poszczególnych dostawców na każde z lotnisk przedstawia poniższa tabela.

	Firma 1	Firma 2	Firma 2
Lotnisko 1	10	7	8
Lotnisko 2	10	11	14
Lotnisko 3	9	12	4
Lotnisko 4	11	13	9

Wyznacz plan zakupu i dostaw paliwa na lotniska, który minimalizuje koszty. Następnie na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.

(a) Jaki jest minimalny łączny koszt dostaw wymaganych ilości paliwa na wszystkie lotniska?

(b) Czy wszystkie firmy dostarczają paliwo?

(c) Czy możliwości dostaw paliwa przez firmy są wyczerpane?

Zadanie 2. [3 pkt]
Zakład może produkować cztery różne wyroby P_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, w różnych kombinacjach. Każdy z wyrobów wymaga pewnego czasu obróbki na każdej z trzech maszyn. Czasy te są podane w poniższej tabeli (w minutach na kilogram wyrobu). Każda z maszyn jest dostępna przez 60 godzin w tygodniu. Produkty P_1, P_2, P_3 i P_4 mogą być sprzedane po cenie, odpowiednio, 9, 7, 6 i 5 $ za kilogram. Koszty zmienne (koszty pracy maszyn) wynoszą, odpowiednio, 2 $ za godzinę dla maszyn M_1 i M_2 oraz 3 $ za godzinę dla maszyny M_3. Koszty materiałowe wynoszą 4 $ na każdy kilogram wyrobu P_1 i 1 $ na każdy kilogram wyrobu P_2, P_3 i P_4. W tabeli podany jest także maksymalny tygodniowy popyt na każdy z wyrobów (w kilogramach).

Produkt	Maszyna			Maksymalny popyt tygodniowy
	M_1	M_2	M_3	
P_1	5	10	6	400
P_2	3	6	4	100
P_3	4	5	3	150
P_4	4	2	1	500

Wyznacz optymalny tygodniowy plan produkcji poszczególnych wyrobów i oblicz zysk z ich sprzedaży.

Zadanie 3. [3 pkt]

W trybie normalnej produkcji pewna firma wytwarza maksymalnie 100 jednostek towaru w każdym z K następujących po sobie okresów, gdzie koszt produkcji jednej jednostki towaru w okresie $j \in \{1, \ldots, K\}$ wynosi c_j \$. Firma może również uruchomić produkcję ponadwymiarową w wielkości do a_j dodatkowych jednostek towaru w okresie j przy koszcie jednostkowym o_j \$. Zapotrzebowanie na towar w okresie j wynosi d_j jednostek. Dane dla $K = 4$ kolejnych okresów przedstawia poniższa tabela.

j	c_j	a_j	o_j	d_j
1	6 000	60	8 000	130
2	4 000	65	6 000	80
3	8 000	70	10 000	125
4	9 000	60	11 000	195

Ponadto firma może przechować w magazynie do 70 jednostek towaru z jednego okresu na kolejny po koszcie 1 500 \$ za każdą magazynowaną jednostkę przez jeden okres. Początkowo w magazynie znajduje się 15 jednostek towaru.

Wyznacz plan produkcji i magazynowania wytwarzanego towaru, który spełnia zapotrzebowania w każdym okresie i minimalizuje łączny koszt. Następnie na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.

(a) Jaki jest minimalny łączny koszt produkcji i magazynowania towaru?

(b) W których okresach firma musi zaplanować produkcję ponadwymiarową?

(c) W których okresach możliwości magazynowania towaru są wyczerpane?

Zadanie 4. [3 pkt]

Dana jest sieć połączeń między miastami reprezentowana za pomocą skierowanego grafu $G = (N, A)$, gdzie N jest zbiorem miast (wierzchołków), a A jest zbiorem połączeń między miastami (łuków). Dla każdego połączenia z miasta i do miasta j, $(i, j) \in A$, dane są koszt przejazdu c_{ij} oraz czas przejazdu t_{ij}. Dane są również dwa miasta i°, $j^\circ \in N$.

Celem jest znalezienie połączenia (ścieżki) od miasta i° do miasta j°, którego całkowity koszt jest najmniejszy i całkowity czas przejazdu nie przekracza z góry zadanego czasu T.

(a) Rozwiąż poniższy egzemplarz problemu (wygenerowany we współpracy z Microsoft Copilot :)).

$N = \{1, \ldots, 10\}$, $i^\circ = 1$, $j^\circ = 10$, $T = 15$. Kolejne krawędzie podane są w postaci (i, j, c_{ij}, t_{ij}):

$(1, 2, 3, 4)$, $(1, 3, 4, 9)$, $(1, 4, 7, 10)$, $(1, 5, 8, 12)$, $(2, 3, 2, 3)$, $(3, 4, 4, 6)$, $(3, 5, 2, 2)$, $(3, 10, 6, 11)$, $(4, 5, 1, 1)$, $(4, 7, 3, 5)$, $(5, 6, 5, 6)$, $(5, 7, 3, 3)$, $(5, 10, 5, 8)$, $(6, 1, 5, 8)$, $(6, 7, 2, 2)$, $(6, 10, 7, 11)$, $(7, 3, 4, 6)$, $(7, 8, 3, 5)$, $(7, 9, 1, 1)$, $(8, 9, 1, 2)$, $(9, 10, 2, 2)$.

(b) Zaproponuj własny egzemplarz problemu i rozwiąż go. Graf ma mieć co najmniej $n \geqslant 10$ wierzchołków, najtańsza ścieżka spełniająca ograniczenia na czas przejazdu ma mieć $\geqslant 3$ krawędzie i mieć większy koszt niż najtańsza ścieżka w wersji bez ograniczeń (ta ma mieć $\geqslant 2$ krawędzie).

(c) Czy ograniczenie na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych jest potrzebne? Jeśli nie, to uzasadnij dlaczego. Jeśli tak, to zaproponuj kontrprzykład, w którym po usunięciu ograniczeń na całkowitoliczbowość (tj. mamy przypadek, w którym model jest modelem programowania liniowego) zmienne decyzyjne w rozwiązaniu optymalnym nie mają wartości całkowitych.

(d) Czy po usunięciu ograniczenia na czasy przejazdu w modelu bez ograniczeń na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych i rozwiązaniu problemu otrzymane połączenie zawsze jest akceptowalnym rozwiązaniem? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 5. [3 pkt]
Rozwiąż problem z zadania 5. z Listy 2 na ćwiczenia dla podanych tam danych. W opisie rozwiązania przedstaw optymalny przydział radiowozów dla każdej zmiany i dzielnicy oraz podaj całkowitą liczbę wykorzystywanych radiowozów.

Zadanie 6. [3 pkt]
Firma przeładunkowa składuje na swoim terenie kontenery z cennym ładunkiem. Teren podzielony jest na $m \times n$ kwadratów. Kontenery składowane są w wybranych kwadratach. Jeden kwadrat może być zajmowany przez co najwyżej jeden kontener. Firma musi rozmieścić kamery, żeby monitorować kontenery. Każda kamera może obserwować k kwadratów na lewo, k kwadratów na prawo, k kwadratów w górę i k kwadratów w dół. Kamera nie może być umieszczona w kwadracie zajmowanym przez kontener.

Zaplanuj rozmieszczenie kamer w kwadratach tak, aby każdy kontener był monitorowany przez co najmniej jedną kamerę oraz liczba użytych kamer była jak najmniejsza.

Rozwiąż własny egzemplarz powyższego problemu z parametrami $m, n \geqslant 5$. Podaj rozwiązania dla co najmniej dwóch różnych wartości parametru k.

Rozwiązania problemów z zadań 1–6 przedstaw w zwięzłym sprawozdaniu (plik pdf), które powinno zawierać:

1. opis modeli
   (a) definicje zmiennych decyzyjnych (opis, jednostki),
   (b) ograniczenia (nie umieszczaj źródeł modelu),
   (c) funkcja celu,
2. krótki opis rozwiązywanych egzemplarzy, uzyskane wyniki oraz ich interpretację.

W sprawozdaniu do opisu modeli (zmienne, ograniczenia, funkcja celu) **należy zastosować zapis matematyczny** (a nie zapis w wybranym języku modelowania)!

Do sprawozdania należy dołączyć pliki z modelami programowania liniowego / liniowego całkowitoliczbowego. Pliki powinny być skomentowane – powinny zawierać imię i nazwisko autora, komentarze zmiennych, zaetykietowane ograniczenia oraz komentarze ograniczeń.