

Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2025 / 26

LISTA 1

Zadania na tej liście zaczerpnięte są m.in. z podręczników [AMO93, DPV06].

Zadanie 1. Podaj egzemplarze, zbiór rozwiązań dopuszczalnych F i funkcję kosztu (celu) c następujących problemów optymalizacyjnych:

- (a) problem minimalnego drzewa Steinera (MINIMUM STEINER TREE),
- (b) problem najkrótszej ścieżki z ograniczeniem (SHORTEST WEIGHT-CONSTRAINED PATH),
- (c) problem minimalnego upakowania (MINIMUM BIN PACKING),
- (d) problem minimalnej k -klasteryzacji (MINIMUM k -CLUSTERING),
- (e) problem minimalnego kolorowania wierzchołkowego grafu (MINIMUM GRAPH COLORING),
- (f) problem otwartego harmonogramowania (MINIMUM OPEN-SHOP SCHEDULING).

Dla każdego z powyższych problemów obliczeniowych spróbuj wyszukać przykładowe zastosowanie do rozwiązywania praktycznych zagadnień.

Definicje powyższych problemów oraz podstawowe informacje o nich możesz znaleźć m.in. na stronie <https://www.csc.kth.se/~viggo/problemelist/compendium.html>.

Zadanie 2. Ferdek zastanawia się, ile piwa Mocne oraz Mocne Full powinien tygodniowo zamawiać. Mocne kosztuje go 1 zł za puszkę, sprzedaje je po 2 zł za puszkę. Za Mocne Full musi zapłacić 1,50 zł za puszkę, a sprzedaje je po 3 zł za puszkę. Z powodu skomplikowanej polityki marketingowej browar sprzedaje tylko jedną puszkę Mocnego Full na każde dwie puszki zwykłego Mocnego kupionego przez Ferdka. Ponadto ze względu na przykre doświadczenia z przeszłości, browar nie sprzedaje Ferdkowi więcej niż 3000 puszek na tydzień. Ferdek wie, że może sprzedawać tyle piwa, ile będzie miał. Sformułuj zadanie jako problem programowania liniowego w celu obliczenia, ile Mocnego i ile Mocnego Full powinien kupować Ferdek, tak aby zmaksymalizować swój zysk. Rozwiąż ten problem (program) graficznie.

Zadanie 3. Pewna firma wytwarzająca dwa produkty P_1 oraz P_2 posiada łączne zdolności produkcyjne wielkości 9 ton dziennie. Firma ma stały kontrakt na dostarczenie co najmniej 2 ton P_1 oraz 3 ton P_2 dziennie do klienta, przy czym klient kupi dowolną ilość każdego z tych produktów. Wytworzenie jednej tony P_1 wymaga 20 maszynogodzin czasu produkcji, a P_2 – 50 maszynogodzin. Maksymalna dzienna dostępność maszynogodzin w firmie wynosi 360. Firma sprzedaje produkt P_1 z zyskiem 6 000 \$ za tonę, a P_2 – 15 000 \$ za tonę.

- (a) Sformułuj ten problem jako zagadnienie LP w celu wyznaczenia planu produkcji, który maksymalizuje zysk firmy. Rozwiąż to zagadnienie graficznie.
- (b) Przekształć sformułowanie z punktu (a) do postaci kanonicznej i standardowej.

Zadanie 4. Znajdź warunki konieczne i wystarczające na wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których poniższe zagadnienie LP

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && x + y \\ & \text{subject to:} && ax + by \leq 1 \\ & && x, y \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) jest sprzeczne (*infeasible*),
- (b) jest nieograniczone (*unbounded*),
- (c) ma dokładnie jedno rozwiązanie optymalne.

Zadanie 5. Sałatka jest dowolną kombinacją następujących składników: pomidorów, sałaty, szpinaku, marchewki i oleju. Każda sałatka musi zawierać: co najmniej 15 gramów białek, co najmniej 2 gramy i co najwyżej 6 gramów tłuszczu, co najmniej 4 gramy węglowodanów, co najwyżej 100 miligramów sodu. Ponadto nie chcemy, aby więcej niż 50 % masy sałatki stanowiła zielenina (sałata lub szpinak). Zawartość składników odżywczych (na 100 gramów) przedstawia poniższa tabela.

Składnik	Energia (kcal)	Białka (gramy)	Tłuszcz (gramy)	Węglowodany (gramy)	Sód (miligramy)
Pomidor	21	0,85	0,33	4,64	9,00
Sałata	16	1,62	0,20	2,37	8,00
Szpinak	371	12,78	1,58	74,69	7,00
Marchewka	346	8,39	1,39	80,70	508,20
Olej	884	0,00	100,00	0,00	0,00

Chcemy sporządzić sałatkę o najmniejszej liczbie kalorii z zachowaniem ograniczeń na składniki odżywcze. Sformułuj ten problem jako problem programowania liniowego.

Literatura

- [AMO93] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1993.
- [DPV06] Sanjoy Dasgupta, Christos H. Papadimitriou, and Umesh Vazirani. *Algorithms*. McGraw-Hill, Inc., USA, 1st edition, 2006.