

Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2025 / 26

LISTA 4

Zadania na tej liście zaczerpnięte są m. in. z [AMO93, Bea, DPV06].

Zadanie 0. Przeczytaj rozdział 4.2 (Shortest Paths: Label-Setting Algorithms $\rightarrow$ Applications) z podręcznika [AMO93] omawiający kilka przykładów wykorzystania wariantów problemu najkrótszej ścieżki do rozwiązywania wybranych problemów optymalizacyjnych.

Zadanie 1. Problem wydawania reszty polega na wydaniu reszty $p \in \mathbb{N}$ przy użyciu monet (banknotów) o zadanych nominałach $a_1, \dots, a_k$. Na przykład, jeśli $k = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, to reszty 8, 12 i 54 mogą być wydane przy użyciu takich nominałów, natomiast reszta $p = 4$ nie może być wydana.

- (a) Dla zadanego przedziału $[l, u]$, $l, u \in \mathbb{N}$, i nominałów $a_1, \dots, a_k$ zaproponuj metodę wyznaczania wszystkich liczb należących do $[l, u]$, które mogą być wydane przy użyciu nominałów $a_1, \dots, a_k$. Sprowadź ten problem do problemu osiągalności wierzchołków z pewnego ustalonego wierzchołka w nieważonym skierowanym grafie acyklicznym.
- (b) Dla zadanej reszty p i nominałów $a_1, \dots, a_k$ zaproponuj metodę wydawania reszty p przy użyciu minimalnej liczby nominałów – o ile resztę p da się wydać. Sprowadź ten problem do problemu najkrótszej ścieżki w nieważonym skierowanym grafie acyklicznym.
- (c) Sformułuj problem z podpunktu (b) za pomocą programowania całkowitoliczbowego.

Zadanie 2. System składu tekstu $\text{T}_\text{E}\text{X}$ używa procedury do podziału akapitu na wiersze w taki sposób, że kiedy wiersze są wyrównywane do lewego i prawego marginesu (justowane), wygląd akapitu jest atrakcyjny. Przypuśćmy, że akapit składa się z n słów i każde słowo ma przyporządkowany numer $i \in \{1, \dots, n\}$ odpowiadający kolejności słowa w akapicie. Niech a_{ij} odpowiada atrakcyjności wiersza, jeżeli ten zaczyna się od słowa o numerze i , a kończy się na słowie o numerze $j - 1$. System $\text{T}_\text{E}\text{X}$ korzysta z pewnej procedury do obliczania każdej wartości a_{ij} . Mając obliczone a_{ij} , zaproponuj metodę rozwiązania problemu podziału akapitu na wiersze tak, aby zmaksymalizować całkowitą atrakcyjność akapitu. Sformułuj problem jako zagadnienie najdłuższej ścieżki w ważonym acyklicznym grafie skierowanym.

Zadanie 3. Firma transportowa przygotowuje plan wypożyczania środków transportu z określonego źródła na okres pięciu lat. Firma może wypełniać swoje zobowiązania wypożyczając nowy środek transportu na początku roku 1 i korzystając z niego do rozpoczęcia j -tego roku, $j \in \{2, \dots, 6\}$. Jeżeli $j < 6$, to firma zwraca dany środek transportu na początku roku j , korzystając z nowo wypożyczonego środka transportu do rozpoczęcia k -tego roku, $k \in \{j + 1, \dots, 6\}$. Koszty eksploatacji środków transportu w latach 1, 2, 3, 4, 5 są odpowiednio równe 1, 3, 6, 10 i 15 jednostek. Ponadto, jeżeli na początku roku 1 firma wypożycza dany środek transportu na okres jednego, dwóch, trzech, czterech lub pięciu lat, to opłaty za wypożyczenie wynoszą odpowiednio 5, 9, 13, 16 i 19 jednostek. Opłaty te wzrastają z roku na rok o jedną jednostkę. Dla przykładu, jeżeli na początku roku 3 środek transportu zostaje wypożyczony na okres jednego, dwóch lub trzech lat, to związane z tym opłaty wynoszą odpowiednio 7, 11 lub 15 jednostek. Wyznacz optymalną strategię firmy, tj. plan wypożyczania o najtańszym koszcie. Sformułuj ten problem jako problem wyznaczania najkrótszej ścieżki w ważonym acyklicznym grafie skierowanym.

Zadanie 4. Zapoznaj się z metodą ścieżki krytycznej (ang. *Critical Path Method*, CPM) – zobacz np. [Bea, SDK99, RW12]. Rozważ model czynności w węźle (*activity on node*). Przeanalizuj sposób wyznaczania charakterystyk projektowych (najwcześniejszy moment zakończenia projektu, wyznaczenie ścieżek i czynności krytycznych, momentów rozpoczęcia i zakończenia czynności, rezerw czasowych) w kontekście problemu najkrótszej (najdłuższej) ścieżki w ważonym acyklicznym grafie skierowanym.

Rozważmy niewielki projekt składający się z 8 zadań, dla których czasy trwania (w dniach) i zależności kolejnościowe przedstawia poniższa tabela.

Zadanie	Zadania poprzedzające	Czas trwania
1	—	3
2	1	6
3	1	7
4	1	5
5	2, 3	13
6	3, 4	8
7	4, 6	11
8	5, 7	6

- Narysuj sieć reprezentującą model czynności w węzle dla tego projektu. Dla wszystkich zadań wyznacz czasy najwcześniejszego i najpóźniejszego rozpoczęcia oraz zakończenia (tj. *earliest/latest* [*start/finish*] time) oraz oblicz minimalny czas potrzebny do realizacji projektu.
- Oblicz rezerwy czasowe (*float*) dla każdego z zadań, a następnie wyznacz czynności krytyczne i zidentyfikuj ścieżkę krytyczną.
- Jak zmieni się najwcześniejszy moment zakończenia projektu, jeśli:
 - ukończenie zadania 6 opóźni się o 3 dni,
 - zadanie 7 zostanie zakończone 7 dni wcześniej niż planowano,
 - realizacja zadania 5 przedłuży się o 7 dni.

Zadanie 5. Rozważmy skierowaną sieć z dodatnimi długościami łuków i ustalonym węzłem s . Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe, a które fałszywe? Uzasadnij swoje odpowiedzi.

- Jeśli wszystkie łuki w sieci mają różne długości, to istnieje tylko jedno drzewo najkrótszych ścieżek od węzła s .
- Jeśli pominiemy skierowanie łuków w sieci (łuki staną się krawędziami nieskierowanymi), to najkrótsze odległości od s nie zmieniają się.
- Spośród wszystkich najkrótszych ścieżek algorytm Dijkstry znajdzie ścieżkę o najmniejszej liczbie łuków.

Zadanie 6. (*Constrained shortest path problem*, por. zadanie 4 z listy 2 LAB). Załóżmy, że w sieci $G = (N, A)$ dla każdego łuku $(i, j) \in A$ dane są długość $c_{ij} \geq 0$ oraz czas przejazdu $t_{ij} \in \mathbb{Z}_+$. Celem jest znalezienie najkrótszych ścieżek z ustalonego węzła $s \in N$ do wszystkich pozostałych węzłów $N \setminus \{s\}$, dla których czas przejazdu nie przekracza podanego ograniczenia $T \in \mathbb{Z}_+$. Zaprojektuj algorytm oparty o programowanie dynamiczne dla tego problemu, uzasadnij jego poprawność oraz przeanalizuj jego złożoność czasową i pamięciową.

HINT: Niech $d[j, t]$ oznacza długość najkrótszej ścieżki z s do j , dla której czas przejazdu nie przekracza t . Wyraż $d[j, t]$ przy pomocy $d[j, t']$ oraz $d[k, t']$ i c_{kj} dla odpowiednich $k \in N$ oraz $t' < t$.

Zadanie 7. (*Przyspieszenie alg. Diala*) Niech $c_{\min} = \min\{c_{ij} : (i, j) \in A\}$ i $w = \max\{1, c_{\min}\}$. Rozważmy implementację algorytmu Diala, w której kubelki mają szerokość w (w klasycznej implementacji szerokość kubelków wynosi $w = 1$). Pokaż, że zmodyfikowany algorytm nigdy nie zmniejszy etykiet wierzchołków, które znajdują się w pierwszym napotkanym niepustym kubelku (niepusty kubek o najmniejszym indeksie). W konsekwencji każdy wierzchołek z tego kubelka można zaetykietować na stałe (permanently). Jaki jest czas działania tak zmodyfikowanego algorytmu Diala?

Literatura

- [AMO93] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1993.
- [Bea] John E. Beasley. OR-Notes. Network analysis. <https://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/netanal.html>. Operations research notes by prof. J. E. Beasley.
- [DPV06] Sanjoy Dasgupta, Christos H. Papadimitriou, and Umesh Vazirani. *Algorithms*. McGraw-Hill, Inc., USA, 1st edition, 2006.
- [RW12] Kenneth A. Ross and Charles R.B. Wright. *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2012.
- [SDK99] Maciej M. Sysło, Narsingh Deo, and Janusz S. Kowalik. *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku Pascal*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999.