

Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2025 / 26

LISTA 5

Zadania na tej liście zaczerpnięte są m.in. z podręczników [AMO93, DPV06].

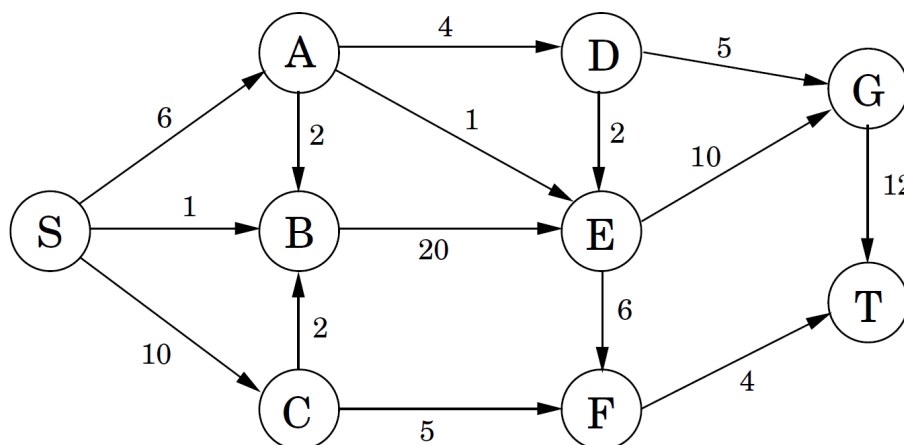
Zadanie 1. (Modyfikacje problemu MAX FLOW)

- (a) Podaj transformację problemu maksymalnego przepływu w sieci z wieloma źródłami i wieloma ujściami do problemu maksymalnego przepływu w sieci z jednym źródłem i jednym ujściem.
- (b) Załóżmy, że w problemie maksymalnego przepływu węzły sieci (poza źródłem i ujściem) mają ograniczoną pojemność, tj. dane są dodatkowe ograniczenia górne na wielkość przepływu wchodzącego do węzłów. Przekształć ten problem do „standardowego” problemu MAX FLOW.
- (c) Pokaż, że jeśli dodamy dowolną liczbę łuków wchodzących do źródła s oraz dowolną liczbę łuków wychodzących z ujścia t o dowolnych pojemnościach, to wartość maksymalnego przepływu nie zmieni się.
- (d) Załóżmy, że w sieci $G = (N, A)$ pewne łuki mają nieskończoną pojemności, ale nie istnieje ścieżka od źródła do ujścia o nieskończonej pojemności. Niech A° oznacza zbiór łuków o skończonych pojemnościach. Pokaż, że możemy zastąpić nieskończoną pojemność każdego łuku $(i, j) \in A \setminus A^\circ$ skończoną pojemnością M taką, że $M \geq \sum_{(i,j) \in A^\circ} u_{ij}$ i nie będzie to miało wpływu na wartość maksymalnego przepływu.

Zadanie 2. Rozważmy problem wyznaczania rozwiązania *dopuszczalnego* (jeśli istnieje) problemu najtańszego przepływu w sieci $G = (N, A)$ bez ograniczeń dolnych na pojemność łuków, tj. $l_{ij} = 0$ dla każdego $(i, j) \in A$. Sformułuj powyższy problem jako zagadnienie maksymalnego przepływu.

Zadanie 3. Sformułuj problem z zadania 4. z listy 2 (rozmieszczenie uczestników konferencji przy stołach pozwalające na bliższe poznanie się) jako zagadnienie maksymalnego przepływu.

Zadanie 4. Przedstaw działanie algorytmu Edmondsa-Karpa wyznaczającego maksymalny przepływ ze źródła S do ujścia T dla grafu z rys. 1. Podaj ścieżki powiększające wybierane w poszczególnych krokach algorytmu oraz otrzymywane sieci residualne. Na koniec znajdź minimalny przekrój odpowiadający wyznaczonemu przepływowi.



Rysunek 1: Graf do zadania 4. Etykiety krawędzi oznaczają ich pojemność. Źródło: [DPV06]

Zadanie 5. (Bezpośrednie wyznaczanie skojarzenia o największym rozmiarze w grafie dwudzielnym)

W zadaniu 7. z listy 2 pokazaliśmy, jak znaleźć skojarzenie o największym rozmiarze w grafie dwudzielnym poprzez redukcję do problemu maksymalnego przepływu. Celem tego zadania jest opracowane bezpośredniego algorytmu.

Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie nieskierowanym grafem dwudzielnym i niech $M \subseteq E$ będzie skojarzeniem w G . Wierzchołek u nazywamy **pokrytym** przez M , jeśli M zawiera krawędź incydentną z u . **Ścieżką alternującą** nazywamy ścieżkę o nieparzystej liczbie krawędzi, która zaczyna się i kończy w niepokrytych wierzchołkach i której kolejne krawędzie naprzemiennie należą do $E \setminus M$ oraz M .

- (a) Pokaż, że M jest skojarzeniem o największym rozmiarze w grafie dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje ścieżka alternująca względem M .
- (b) Podaj algorytm, który dla danego grafu dwudzielnego oraz skojarzenia M znajduje ścieżkę alternującą względem M w czasie $O(|V| + |E|)$. **HINT: Użyj wariantu BFS.**
- (c) Zaprojektuj algorytm, który w oparciu o wyznaczone ścieżki alternujące znajduje skojarzenie o największym rozmiarze w grafie dwudzielnym w czasie $O(|V| \cdot |E|)$.

HINT: Wskazówki można znaleźć np. w rozdziale 25.1 w [CLRS22].

Zadanie 6. Rozważmy wersję **minimaksową** zadania transportowego w sieci $G = (N, A)$ z funkcją celu postaci $\max\{c_{ij}x_{ij} : (i, j) \in A\}$ (w klasycznej wersji funkcja celu ma postać $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij}$). W wersji minimaksowej szukamy więc przepływu $(x_{ij})_{(i,j) \in A}$ o wartościach całkowitych (reprezentującego plan transportu między dostawcami i odbiorcami), który **minimalizuje** $\max\{c_{ij}x_{ij} : (i, j) \in A\}$.

- (a) Rozważmy zrelaksowaną (poluźnioną) wersję minimaksowego zadania transportowego, w której dla ustalonego parametru λ chcemy wiedzieć, czy istnieje przepływ $(x_{ij})_{(i,j) \in A}$ o wartościach całkowitych spełniający warunek $\max\{c_{ij}x_{ij} : (i, j) \in A\} \leq \lambda$. Sprowadź tak zrelaksowany problem do problemu maksymalnego przepływu.
- (b) Użyj wyniku z punktu (a) do skonstruowania algorytmu dla minimaksowego zadania transportowego. **HINT: Zastosuj przeszukiwanie binarne.**

Literatura

- [AMO93] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1993.
- [CLRS22] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 4th edition, 2022.
- [DPV06] Sanjoy Dasgupta, Christos H. Papadimitriou, and Umesh Vazirani. *Algorithms*. McGraw-Hill, Inc., USA, 1st edition, 2006.