Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 1

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2023/2024

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie σ-ciała podzbiorów zbioru $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

Zadanie 2. Ustalmy niepusty zbiór indeksów T (T może być skończony, przeliczalny nieskończony lub nieprzeliczalny). Załóżmy, że dla każdego $i \in T$, $\mathcal{S}_i$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω. Pokaż, że $\mathcal{S} = \bigcap_{i \in T} \mathcal{S}_i$ jest również σ-ciałem podzbiorów Ω.

Zadanie 3. Ustalmy rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru Ω. **σ-ciało generowane przez rodzinę $\mathcal{A}$** definiujemy jako

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : \mathcal{S} \text{ jest } \sigma\text{-ciałem} \wedge \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}\}.$$

(a) Uzasadnij, że rodzina $\sigma(\mathcal{A})$ z powyższej definicji jest dobrze określona (tzn. jest niepusta i jest σ-ciałem).

(b) Udowodnij, że dla dowolnej ustalonej rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ istnieje najmniejsze (w sensie inkluzji) σ-ciało podzbiorów Ω zawierające $\mathcal{A}$.[1]
HINT: Pokaż, że tym σ-ciałem jest $\sigma(\mathcal{A})$.

Zadanie 4. Niech $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Wyznacz najmniejsze σ-ciało podzbiorów przestrzeni Ω zawierające rodzinę $\{A, B\}$. Jaka jest moc tego σ-ciała? Pokaż przykład podzbioru Ω, który nie należy do tego σ-ciała.

Zadanie 5. Niech $\emptyset \neq A \subsetneq B \subsetneq \Omega$. Wyznacz ciało zbiorów generowane przez rodzinę $\{A, B\}$.[2]

Zadanie 6. Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie skończoną rodziną podzbiorów przestrzeni Ω. Wyznacz σ-ciało $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{A})$ generowane przez rodzinę $\mathcal{A}$. W tym celu wykonaj następujące kroki.

(a) Dla ciągów $\eta \in \{-1, 1\}^n$ zdefiniuj $A_\eta = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\eta_i}$, gdzie $A^1 = A$, $A^{-1} = A^C$.

(b) „Przyjrzyj się” tak określonym zbiorom A_η. Pokaż, że:

i) jeśli $\eta, \tau \in \{-1, 1\}^n$, $\eta \neq \tau$, to $A_\eta \cap A_\tau = \emptyset$,

ii) $\bigcup \{A_\eta \colon \eta \in \{-1, 1\}^n\} = \Omega$,

iii) $A_i = \bigcup \{A_\eta \colon \eta \in \{-1, 1\}^n \wedge \eta_i = 1\}$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) Dla $T \subseteq \{-1, 1\}^n$ oznaczmy $A_T = \bigcup_{\eta \in T} A_\eta$.

(d) Pokaż, że $\sigma(\mathcal{A}) = \{A_T \colon T \subseteq \{-1, 1\}^n\}$.

[1] Na wykładzie pokazaliśmy, że dla jednoelementowych rodzin $\mathcal{A} = \{A\}$ tym σ-ciałem jest $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.
[2] Przy okazji przypomnijmy, że jeśli ciało podzbiorów Ω jest skończone, to jest też σ-ciałem.

Zadanie 7. Niech $\mathcal{S}$ będzie σ-ciałem podzbiorów Ω i niech $A \subseteq \Omega$. Oznaczmy $\mathcal{S}_A = A \cap \mathcal{S} = \{A \cap B \colon B \in \mathcal{S}\}$.

(a) Pokaż, że $\mathcal{S}_A$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru A.

(b) Pokaż, że jeśli $A \in \mathcal{S}$, to $\mathcal{S}_A = \{B \in \mathcal{S} \colon B \subseteq A\}$.

Definicja. σ-ciało generowane przez rodzinę wszystkich otwartych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{Z}_+$, nazywamy **σ-ciałem zbiorów borelowskich**[3] $\mathbb{R}^d$ i oznaczamy przez $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.[4]

Fakt. Niech $\mathcal{A}_1 = \{(a,b) \colon a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ oraz $\mathcal{A}_2 = \{(a,b) \times (c,d) \colon a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d\}$. Wówczas $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A}_1)$ oraz $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

Zadanie 8. Niech $\mathcal{B} = \mathcal{B}([0,1])$ oznacza rodzinę podzbiorów borelowskich odcinka $[0,1]$ i niech $\mathcal{S} = \{B \times [0,1] \colon B \in \mathcal{B}\}$.

(a) Pokaż, że $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru $[0,1]^2$ ($[0,1]^2 \equiv [0,1] \times [0,1]$).

(b) Podaj przykład podzbioru borelowskiego zbioru $[0,1]^2$, który nie należy do $\mathcal{S}$.

ZADANIA NIEOBOWIĄZKOWE

Na listach zadań mogą pojawiać się zadania oznaczone symbolem ★. Są to zadania nieobowiązkowe, ale niekoniecznie trudne. Zadania te można (a nawet warto!) omawiać na ćwiczeniach „jak starczy czasu", czyli po zrobieniu wszystkich zadań bez gwiazdki. Osoby zainteresowane tematyką szczególnie zachęcam do zastanowienia się nad rozwiązaniami tych zadań.

★ **Zadanie 9.** Pokaż przykład ciała zbiorów, które nie jest σ-ciałem.

★ **Zadanie 10.** Niech Ω będzie niepustym zbiorem i niech

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq \Omega \colon A \text{ jest przeliczalny lub } A^C \text{ jest przeliczalny}\}.$$

Pokaż, że:

(a) $\mathcal{C}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω,

(b) $\mathcal{C} = \sigma(\{\{x\} \colon x \in \Omega\})$.

Uwaga dot. nazewnictwa. Zbiór A taki, że A^C jest przeliczalny (ang. *countable)*, nazywamy zbiorem koprzeliczalnym (ang. *cocountable*). Podobnie, zbiór A taki, że A^C jest skończony, nazywamy zbiorem koskończonym (ang. *cofinite*).

★ **Zadanie 11.** Niech $\mathcal{S}$ będzie σ-ciałem podzbiorów Ω. Pokaż, że $\mathcal{S}$ jest albo skończony, albo nieprzeliczalny (innymi słowy, nie istnieją nieskończone przeliczalne σ-ciała).

★ **Zadanie 12.** Niech $A, B \in \mathcal{B}([0,1])$. Pokaż, że $A \times B \in \mathcal{B}([0,1]^2)$.
HINT: Zauważ, że $A \times B = (A \times [0,1]) \cap ([0,1] \times B)$.

[3] Émile Borel (1871-1956), francuski matematyk

[4] Tą definicję możemy rozszerzyć na dowolne przestrzenie topologiczne.