Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 10

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2023/2024

UWAGA – W przykładach odnoszących się do zadań z poprzednich list można korzystać z tego, co zostało już wcześniej wyliczone.

Zadanie 1. Rzucamy niezależnie dwoma sześciennymi, symetrycznymi kostkami. Niech X oznacza mniejszy, a Y większy z wyników rzutów (jak w zadaniu 1 z listy 6). Oblicz $\mathbf{cov}\,(X, Y)$ oraz $\rho\,(X, Y)$.

Zadanie 2. Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $U\,([0, 1])$. Niech $Y = \min\{X_1, X_2\}$ oraz $Y = \max\{X_1, X_2\}$ (patrz zadania 4(c) z listy 6 oraz 2(c) z listy 7). Oblicz $\mathbf{cov}\,(X, Y)$ oraz $\rho\,(X, Y)$.

Zadanie 3. Niech $X \sim U\,([0, \pi])$ i niech $Y = \sin X$ oraz $Z = \cos X$ (jak w zadaniu 4 z listy 7). Czy zmienne losowe Y i Z są niezależne? Czy są nieskorelowane[1]?

Zadanie 4. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym $\mathrm{Exp}\,(\lambda)$. Wyznacz funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X + Y$.

Zadanie 5.

(a) Wyznacz funkcję tworzącą prawdopodobieństwo (PGF) oraz funkcję tworzącą momenty (MGF) zmiennej losowej $X \sim \mathrm{Geo}\,(p)$.

(b) Oblicz $\mathbf{E}\,(X)$ i $\mathbf{var}\,(X)$ korzystając z PGF oraz MGF wyznaczonych w punkcie (a).

(c) Korzystając z własności funkcji tworzących dla sumy niezależnych zmiennych losowych podaj wzory na PGF oraz MGF zmiennej losowej o rozkładzie ujemnym dwumianowym $\mathrm{NB}\,(k, p)$.

Zadanie 6.

(a) Wyznacz MGF zmiennej losowej o standardowym rozkładzie normalnym.

(b) Uogólnij wynik z punktu (a) na zmienne losowe o rozkładzie $\mathcal{N}\,(\mu, \sigma^2)$ dla dowolnych μ oraz $\sigma^2 > 0$.

HINT: Możesz skorzystać z faktu, że jeśli $Z \sim \mathcal{N}\,(0, 1)$, to $\sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}\,(\mu, \sigma^2)$ oraz własności MGF podanych na wykładzie.

(c) Korzystając z własności MGF pokaż, że jeśli $X \sim \mathcal{N}\,(\mu_1, \sigma_1^2)$ oraz $Y \sim \mathcal{N}\,(\mu_2, \sigma_2^2)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym, to $X + Y \sim \mathcal{N}\,(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

[1] Zmienne losowe X i Y nazywamy nieskorelowanymi, jeśli $\mathbf{cov}\,(X, Y) = 0$.

★ **Zadanie 7.** Pokaż, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ t. że $ac \neq 0$ współczynnik korelacji $\rho\,(X, Y) = \dfrac{\mathbf{cov}\,(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ spełnia $\rho\,(aX + b, cY + d) = \rho\,(X, Y)$.

★ **Zadanie 8.** Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem nieskorelowanych zmiennych losowych o takiej samej wariancji $\sigma^2 > 0$. Oznaczmy $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Pokaż, że dla $m < n$ zachodzi $\mathbf{cov}\,(S_m, S_n) = \mathbf{var}\,(S_m) = m\,\sigma^2$.

★ **Zadanie 9.** Wyznacz funkcje charakterystyczne zmiennych losowych $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ oraz $Y \sim \mathrm{Po}\,(\lambda)$.

★ **Zadanie 10.** Pokaż, że funkcja charakterystyczna zmiennej losowej $X \sim U\,([-1, 1])$ zadana jest wzorem $\phi_X(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ dla $t \neq 0$ oraz $\phi_X(0) = 1$.