Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 12

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2023/2024

UWAGI

1. Fragmenty zadań odnoszące się do tematów z 15. wykładu będą omówione na wykładzie.
2. Jedno lub dwa zadania na egzaminie będą związane z tą listą.

Zadanie 1. Niech $\mathbf{X} = (X_n : n \in \mathbb{N})$ będzie łańcuchem Markowa z wykładu, opisującym poruszanie się więźnia na spacerniaku[1], którego diagram przejścia przedstawia rysunek 1. Wykonaj poniższe zadania (obliczenia numeryczne możesz wykonać na komputerze).

(a) Podaj macierz przejścia $\mathbf{P}$ łańcucha Markowa $\mathbf{X}$.

(b) Wyznacz $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^3$ oraz $\mathbf{P}^4$. Jaką postać będzie miała macierz $\mathbf{P}^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$? Jak możemy zinterpretować te macierze?

(c) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że więzień będzie znajdował się w wierzchołku v_0 po 1, 2, 3 i 4 krokach, jeśli w chwili $n = 0$ znajduje się w wierzchołku v_0. Uogólnij te wyniki dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

(d) Jak zmienią się prawdopodobieństwa obliczone w punkcie (c), jeśli więzień z prawdopodobieństwem $1/2$ zaczyna spacer albo w v_0, albo w v_1?

(e) Czy łańcuch Markowa $\mathbf{X}$ jest nieredukowalny? Czy jest nieokresowy?

(f) Wyznacz rozkład stacjonarny[2] π łańcucha Markowa $\mathbf{X}$. Czy jest on określony jednoznacznie? Czy dla dowolnego rozkładu początkowego π_0 rozkład π_n w chwili n zbiega do rozkładu stacjonarnego wraz z $n \to \infty$?

(g) Załóżmy, że więzień zmienia strategię spaceru. W każdym kroku niezależnie rzuca symetryczną monetą i jeśli wypadł orzeł, to zostaje w miejscu, gdzie stał. Jeśli natomiast wypadła reszka, to ponownie niezależnie rzuca monetą i idzie zgodnie (orzeł), albo przeciwnie (reszka) do ruchu wskazówek zegara do kolejnego wierzchołka. Wykonaj polecenia z punktów (a)–(f) dla tak zmodyfikowanego łańcucha Markowa.

Zadanie 2. W każdym momencie czasu $n \in \mathbb{N}$ rzucamy niezależnie sześcienną, symetryczną kostką do gry. Niech X_n będzie największym z wyników wyrzuconych do chwili n włącznie.

(a) Uzasadnij, że $\mathbf{X} = (X_n : n \in \mathbb{N})$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa.

(b) Określ przestrzeń stanów oraz wyznacz macierz przejścia $\mathbf{P}$ i rozkład początkowy π_0 łańcucha Markowa $\mathbf{X}$.

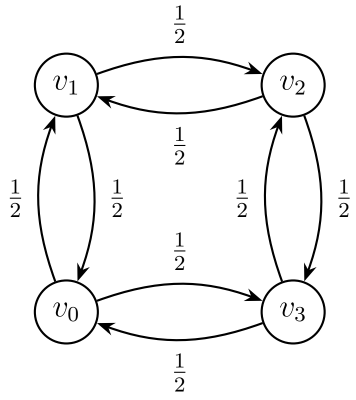
(c) Dla $n \in \{0, \ldots, 5\}$ oblicz prawdopodobieństwo tego, że proces w kroku n znajdzie się w stanie 6 (obliczenia możesz wykonać na komputerze).

(d) Czy łańcuch Markowa $\mathbf{X}$ jest nieredukowalny? Czy jest nieokresowy?

---

[1] Patrz przykład ze stron 8–9 w [Häg02].

[2] Czyli rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni stanów zadany przez wektor π spełniający $\pi\mathbf{P} = \pi$.



Rysunek 1: Diagram przejść dla łańcucha Markowa z zadania 1.

Zadanie 3. (*Markov Chain Monte Carlo*) Niech $G = (V, E)$ będzie nieskierowanym, spójnym[3] grafem prostym[4] o $n = |V|$ wierzchołkach i $m = |E|$ krawędziach. Podzbiór $I \subseteq V$ zbioru wierzchołków jest **zbiorem niezależnym** (ang. *independent set)*, gdy $(\forall\, u, v \in I)(\{u, v\} \notin E)$, tj. żadne dwa wierzchołki ze zbioru I nie są połączone krawędzią. Dla podanego na wejściu grafu G naszym celem jest losowe wygenerowanie niezależnego podzbioru wierzchołków z rozkładem możliwie jak najbliższym jednostajnemu (zauważmy, że w danym grafie może być bardzo dużo zbiorów niezależnych – wykładniczo dużo względem n). Rozważmy poniższy algorytm (k to liczba rund, która powinna być *odpowiednio* duża).

Algorytm 1 Generowanie losowego zbioru niezależnego

procedure GENERATEIS($G = (V, E)$, k)
    $I_0 \leftarrow$ dowolny „oczywisty” zbiór niezależny (np. $I_0 = \emptyset$ lub $I_0 = \{v\}$, $v \in V$)
    for $t = 1$ **to** k **do**
        wybierz niezależnie i jednostajnie losowo $v \in V$
        if $v \in I_{t-1}$ **then**
            $I_t \leftarrow I_{t-1} \setminus \{v\}$
        else if $v \notin I_{t-1}$ **and** $I_{t-1} \cup \{v\}$ jest zbiorem niezależnym **then**
            $I_t \leftarrow I_{t-1} \cup \{v\}$
        else
            $I_t \leftarrow I_{t-1}$
        end if
    end for
end procedure

Działanie tego algorytmu może zostać zamodelowane przez pewien łańcuch Markowa.

(a) Określ przestrzeń stanów oraz opisz macierz przejścia $\mathbf{P}$ i rozkład początkowy π_0 łańcucha Markowa $\mathbf{X}$ modelującego działanie powyższego algorytmu.

(b) Czy łańcuch Markowa $\mathbf{X}$ jest nieredukowalny? Czy jest nieokresowy?

(c) Pokaż, że rozkładem stacjonarnym π łańcucha Markowa $\mathbf{X}$ jest rozkład jednostajny na przestrzeni stanów. Uzasadnij, że jest on określony jednoznacznie, a rozkład π_t łańcucha Markowa $\mathbf{X}$ po t krokach zbiega do rozkładu stacjonarnego wraz z $t \to \infty$.

[3] Krawędzie łączące wierzchołki „nie są zorientowane” – tj. mogą być reprezentowane przez nieuporządkowane pary wierzchołków, a między każdą parą wierzchołków istnieje nieskierowana ścieżka.

[4] Bez pętli, czyli krawędzi od wierzchołka do siebie samego, oraz bez krawędzi wielokrotnych (między każdą parą wierzchołków jest co najwyżej jedna krawędź).

Uwaga – osobną kwestią jest to, jak dobrać odpowiednią liczbę rund k, żeby rozkład po k krokach był „dostatecznie bliski” rozkładowi jednostajnemu. Techniki analizy tempa zbieżności ergodycznych łańcuchów Markowa do rozkładu stacjonarnego wykraczają poza zakres tego kursu. Jest to jednak bardzo ważne zagadnienie w dziedzinie algorytmiki, stanowiące podstawę projektowania i analizy wielu algorytmów zrandomizowanych (patrz np. [MU05, LPW09]).

Literatura

[Häg02] Olle Häggström. *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*. Cambridge University Press, 3rd edition, 2002.

[LPW09] David A. Levin, Yuval Peres, and Elizabeth L. Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, 1st edition, 2009.

[MU05] Michael Mitzenmacher and Eli Upfal. *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge University Press, USA, 2005.