Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 4

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2023/2024

Zadanie 1. Z talii 52 kart wybieramy losowo 2 karty. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę kart koloru ♣. Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej X.

Zadanie 2. Niech X i Y oznaczają wyniki dwóch niezależnych rzutów sześcienną, symetryczną kostką do gry. Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej $Z = X + Y$.

Zadanie 3. (*Indykatorowe zmienne losowe*) Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ i niech $A \in \mathcal{S}$. Zdefiniujmy

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \omega \in A \\ 0, & \text{jeśli } \omega \in \Omega \setminus A\,. \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja $\mathbb{1}_A$ jest zmienną losową i wyznacz jej dystrybuantę. Zmienną losową $\mathbb{1}_A$ nazywamy *indykatorową zmienną losową zdarzenia A*.

Zadanie 4. Niech $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\Omega)$ oraz $P(A) = \lambda(A)/\pi$, gdzie $\lambda(A)$ oznacza powierzchnię (miarę Lebesgue'a) zbioru $A \in \mathcal{S}$. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$.

(a) Niech X będzie zmienną losową zdefiniowaną jako $X((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jaka jest interpretacja geometryczna zmiennej losowej X? Wyznacz dystrybuantę X i narysuj jej wykres.

(b) Kula o promieniu r w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ma objętość $C_n\, r^n$ dla pewnych stałych C_n (np. $C_1 = 2$, $C_2 = \pi$, $C_3 = \frac{4}{3}\pi$, $C_4 = \frac{\pi^2}{2}$). Uogólnij wynik z podpunktu (a) na kule w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 5. Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X. Pokaż, że:

(a) $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$ dla dowolnych $a \leqslant b \in \mathbb{R}$,

(b) F jest prawostronnie ciągła, tj. dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim\limits_{t \to a^+} F(t) = F(a)$.

Zadanie 6. (*Rozkłady mieszane*)

(a) Pokaż, że jeśli funkcje $F_1(t)$ oraz $F_2(t)$ są dystrybuantami, to dla dowolnego $\alpha \in [0, 1]$ funkcja $F(t) = \alpha F_1(t) + (1 - \alpha)F_2(t)$ jest także dystrybuantą.

(b) Niech $F_1(t)$ będzie dystrybuantą zmiennej losowej X z zadania 4(a), a $F_2(t)$ dystrybuantą dyskretnej zmiennej losowej przyjmującej wartości 0 i $\frac{3}{2}$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ każda oraz wartość $\frac{1}{2}$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Wyznacz dystrybuantę $F(t) = \alpha F_1(t) + (1 - \alpha)F_2(t)$ dla $\alpha = \frac{1}{3}$ i naszkicuj wykresy $F_1(t)$, $F_2(t)$ oraz $F(t)$.

Zadanie 7. (*Istnienie dyskretnej zmiennej losowej o zadanym rozkładzie*) Niech T będzie przeliczalnym zbiorem indeksów i niech b_i, $i \in T$, będą liczbami rzeczywistych takimi, że $b_i \neq b_j$ dla $i \neq j$. Niech p_i, $i \in T$, będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi $\sum_{i \in T} p_i = 1$. Pokaż, że istnieje wówczas przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ i dyskretna zmienna losowa $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$, której funkcja masy prawdopodobieństwa p_X zadana jest przez

$$p_X(b_i) = p_i, \ i \in T \quad \text{oraz} \quad p_X(b) = 0, \ b \notin B\,.$$

Uwaga: W konsekwencji tego twierdzenia możemy powiedzieć „niech $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie dyskretną zmienną losową przyjmującą wartość b_i z prawdopodobieństwem p_i, $i \in T$" bez konieczności definiowania przestrzeni Ω i konstruowania X explicite.

★ **Zadanie 8.** Niech $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rozbiciem przestrzeni Ω na zdarzenia i niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Oznaczmy $X = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n \, \mathbb{1}_{A_n}$. Pokaż, że X jest zmienną losową i wyznacz wzór na jej dystrybuantę.

★ **Zadanie 9.** Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ i niech $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową. Dla $A \in \mathcal{B}$ niech $P_X(A) = (P \circ X^{-1})(A) = P(X \in A)$ (P_X nazywamy rozkładem zmiennej losowej X). Pokaż, że $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

★ **Zadanie 10.** Niech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Pokaż, że jeśli $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Omega)$, to wszystkie funkcje odwzorowujące Ω na pewien przeliczalny podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ są dyskretnymi zmiennymi losowymi.