Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 6

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2023/2024

Zadanie 1. Rzucamy niezależnie dwoma sześciennymi, symetrycznymi kostkami. Niech X oznacza mniejszy, a Y większy z wyników rzutów (jeśli na obu kostkach wypadła taka sama liczba oczek k, przyjmujemy $X = Y = k$).

(a) Wyznacz rozkład łączy oraz rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y.

(b) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

(c) Oblicz $\mathbf{E}(X)$ oraz $\mathbf{E}(Y)$.

Zadanie 2. Niech $F(s,t)$ będzie (łączną) dystrybuantą wektora losowego (X,Y). Pokaż, że dla dowolnych $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ takich, że $a < b$ oraz $c < d$ zachodzi

$$P(a < X \leqslant b \wedge c < Y \leqslant d) = F(b,d) + F(a,c) - F(a,d) - F(b,c)\,.$$

Zadanie 3. Zmienne losowe X i Y mają gęstość prawdopodobieństwa łącznego

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & \text{gdy } x, y > 0\,, \\ 0, & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Wyznacz gęstości brzegowe, dystrybuantę łączną oraz dystrybuanty brzegowe X i Y, a także oblicz $P(X + Y \leqslant 1)$ oraz $P(X > Y)$.

Zadanie 4. Niech $X_1, \dots, X_n$ będą i.i.d.[1] zmiennymi losowymi z dystrybuantą F. Niech $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ oraz $Z = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

(a) Wyznacz dystrybuanty zmiennych losowych Y oraz Z.

(b) Zakładając, że X_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, są dyskretnymi zmiennymi losowymi z funkcją masy prawdopodobieństwa $P(X_i = k) = \dfrac{1}{N}$, $k \in \{1, \dots, N\}$, wyznacz funkcje masy prawdopodobieństwa Y oraz Z.

(c) Zakładając, że X_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, są zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$, wyznacz funkcje gęstości prawdopodobieństwa Y oraz Z.

Zadanie 5. Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennych losowych z zadań 1 i 2 z Listy 5.

Zadanie 6. Niech X będzie zmienną losową przyjmującą wartości ze zbioru $\mathbb{Z}_+$. Wyznacz $\mathbf{E}(X)$ w przypadku, gdy:

(a) $P(X = k) = 2^{-k}$ dla $k \in \mathbb{Z}_+$,

(b) $P(X = k) = \dfrac{6}{\pi^2}\dfrac{1}{k^2}$ dla $k \in \mathbb{Z}_+$.

[1]Skrótem i.i.d. oznaczać będziemy zmienne losowe, które są niezależne i mają ten sam rozkład; i.i.d. – ang. *independent and identically distributed*.

Zadanie 7. Niech $X\colon \Omega \to \mathbb{N}$ będzie dyskretną zmienną losową przyjmującą wartości w zbiorze liczb naturalnych. Pokaż, że $\mathbf{E}\,(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$, o ile szereg po prawej stronie jest zbieżny.

★ **Zadanie 8.** Pokaż, że dyskretne zmienne losowe $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $x \in rng(X)$ oraz $y \in rng(Y)$ zachodzi $p_{X,Y}(x, y) = f(x)g(y)$, gdzie $p_{X,Y}$ jest funkcją masy prawdopodobieństwa łącznego zmiennych losowych X i Y.

★ **Zadanie 9.** Pokaż, że zdarzenia A i B są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy niezależne są zmienne losowe $\mathbb{1}_A$ i $\mathbb{1}_B$.