Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 7

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2023/2024

Zadanie 1. Pokaż następujące własności wariancji:

(a) $\mathbf{var}\,(X) = \mathbf{E}\,(X^2) - \mathbf{E}\,(X)^2$,

(b) $\mathbf{var}\,(aX + b) = a^2\,\mathbf{var}\,(X)$ dla $a, b \in \mathbb{R}$,

(c) jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne, to $\mathbf{var}\,(X + Y) = \mathbf{var}\,(X) + \mathbf{var}\,(Y)$.

Zadanie 2. Wyznacz

(a) wariancję zmiennych losowych z zadań 1 i 6 z listy 6,

(b) wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X z zadania 3 z listy 5,

(c) wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych losowych Y oraz Z z zadania 4(c) z listy 6.

Zadanie 3. Załóżmy, że niezależnie powtarzamy próbę ethernetową z optymalną wartością parametru p (patrz zadanie 8 z listy 3) aż do osiągnięcia pierwszego sukcesu. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję liczby wykonanych powtórzeń.[1]

Zadanie 4. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, \pi]$, tj. rozkładzie z gęstością $f(t) = 1/\pi$ dla $t \in (0, \pi)$ oraz $f(t) = 0$ w p.p. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych losowych $Y = \sin X$ oraz $Z = \cos X$.

Zadanie 5. Niech X będzie zmienną losową o o rozkładzie arcusa sinusa, tj. rozkładzie ciągłym z dystrybuantą

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t < 0\,, \\ \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t}), & \text{gdy } t \in [0,1]\,, \\ 1, & \text{gdy } t > 1\,. \end{cases}$$

(a) Wyznacz gęstość $f(t)$ zmiennej losowej X.

(b) Oblicz $\mathbf{E}\,(X)$ oraz $\mathbf{var}\,(X)$.

(c) Narysuj (np. przy pomocy jakiegoś pakietu matematycznego) wykres dystrybuanty $F(t)$ oraz gęstości $f(t)$.

Zadanie 6. Pokaż, że jeśli zmienna losowa o rozkładzie dyskretnym (odpowiednio, ciągłym) ma skończony k-ty moment $\mathbf{E}(X^k)$, to istnieją wszystkie jej momenty niższego rzędu $\mathbf{E}\,(X^j)$ dla $j \in \{1, \ldots, k-1\}$.[2]

Zadanie 7. Pokaż przykład zmiennych losowych X i Y, które nie są niezależne, ale zachodzi $\mathbf{E}\,(XY) = \mathbf{E}\,(X)\,\mathbf{E}\,(Y)$.

[1] Rozkład liczby niezależnych powtórzeń potrzebnych do osiągnięcia pierwszego sukcesu nazywamy rozkładem geometrycznym. Na kolejnym wykładzie omówimy ten rozkład bardziej szczegółowo.

[2] Fakt ten jest prawdziwy dla dowolnych zmiennych losowych.

★ **Zadanie 8.** Pokaż, że jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym z dystrybuantą F przyjmującą tylko nieujemne wartości, to $\mathbf{E}\,(X) = \int_0^\infty (1 - F(t))\,dt$, o ile ta całka istnieje.

★ **Zadanie 9.** Zmienna losowa ma rozkład Cauchy'ego z parametrami $a \in \mathbb{R}$ oraz $\gamma > 0$, jeśli jej gęstością jest funkcja

$$f_{a,\gamma}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(t-a)^2 + \gamma^2}\,.$$

(a) Narysuj (np. przy pomocy jakiegoś pakietu matematycznego) wykres funkcji $f_{a,\gamma}$ dla różnych wartości parametrów a oraz γ.

(b) Spróbuj wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej o rozkładzie Cauchy'ego.