Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 8

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2023/2024

Zadanie 1. Wyznacz wariancję zmiennych losowych o rozkładzie geometrycznym $\mathrm{Geo}\,(p)$ oraz Poissona $\mathrm{Po}\,(\lambda)$.

Zadanie 2. Źródło generuje losową liczbę N pakietów zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ. Każdy pakiet dociera do celu niezależnie z prawdopodobieństwem p. Wyznacz rozkład liczby pakietów, które dotrą do celu.

Zadanie 3. Niech $X \sim \mathrm{Geo}\,(p)$ oraz $Y \sim \mathrm{Geo}\,(r)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Z = \min\{X, Y\}$.

Zadanie 4. (*Własność braku pamięci, ang. memoryless property*) Niech $X \sim \mathrm{Geo}\,(p)$.

(a) Pokaż, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi $P(X = n + m \,|\, X > m) = P(X = n)$.

(b) Zaproponuj *rozsądną* interpretację powyższego faktu.

★ (c) Pokaż, że rodzina rozkładów geometrycznych jest jedyną rodziną rozkładów dyskretnych na zbiorze $\mathbb{Z}_+$ o własności braku pamięci.

Zadanie 5. Niech $X \sim \mathcal{N}\,(0, 1)$. Wyznacz wzór na momenty zmiennej losowej X, tj. $\mathbf{E}(X^k)$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 6. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą i.i.d. zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathrm{Exp}\,(1)$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Uogólnij ten wynik na przypadek, gdy X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym $X_i \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda_i)$ dla pewnych dodatnich stałych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

★ **Zadanie 7.** Ustalmy $\lambda \in \mathbb{R}_+$ oraz $k \in \mathbb{Z}_+$ i niech $t > 0$. Rozważmy zmienne losowe $T \sim \mathrm{Gamma}\left(k, \dfrac{1}{\lambda}\right)$ oraz $X \sim \mathrm{Po}\,(\lambda t)$. Pokaż, że $P(T \leqslant t) = P(X \geqslant k)$.

★ **Zadanie 8.** (*memoryless property*) Niech $X \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda)$.

(a) Pokaż, że dla dowolnych $s, t \in \mathbb{R}_+$ zachodzi $P(X > s + t \,|\, X > s) = P(X > t)$.

(b) Pokaż, że rodzina rozkładów wykładniczych jest jedyną rodziną rozkładów ciągłych na zbiorze $\mathbb{R}_+$ o własności braku pamięci.