Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 9

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2023/2024

Zadanie 1. Niech R oznacza IQ losowo spotkanej osoby na ulicy. Załóżmy, że wiadomo, iż $\mathbf{E}(R) = 100$ oraz $\mathbf{var}(R) = 100$. Zastosuj nierówność Markowa oraz Czebyszewa do oszacowania z góry $P(R \geqslant 200)$.

W zadaniach 2, 3 i 4 zakładamy, że kule wrzucane są niezależnie i jednostajnie losowo do n ponumerowanych urn (rozważamy model jak w zadaniu domowym 2).

Zadanie 2. Niech U_n^m oznacza liczbę pustych urn po wrzuceniu m kul.

(a) Wyznacz $\mathbf{E}(U_n^m)$.

(b) Oznaczmy $u_1(n) = \mathbf{E}(U_n^n)$ oraz $u_2(n) = \mathbf{E}(U_n^m)$ dla $m = n \ln n$. Wyznacz $\lim_{n\to\infty} u_1(n)$ oraz $\lim_{n\to\infty} u_2(n)$.

Zadanie 3. (*Birthday paradox*) Niech B_n oznacza moment pierwszej kolizji.

(a) Wyznacz wzór na $\mathbf{E}(B_n)$.

HINT: Wyznacz $P(B_n > k)$ dla $k \in \mathbb{N}$ i skorzystaj z zadania 7 z listy 6.

(b) Korzystając z podobnych oszacowań jak w zadaniu 5 z listy 0, wyprowadź ograniczenie górne na $\mathbf{E}(B_n)$ postaci $\alpha + \sum_k e^{f(n,k)}$, gdzie α jest pewną stałą, a f funkcją n i k. Następnie oszacuj z góry otrzymaną sumę przed odpowiednią całkę i wyznacz ograniczenie górne na wartość oczekiwaną momentu pierwszej kolizji postaci $\mathbf{E}(B_n) \leqslant an^b + c$ dla odpowiednich stałych a, b i c.

HINT: Do obliczenia całki, która pojawi się we wzorze, użyj wybranego pakietu matematycznego lub skorzystaj z faktu, że $\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

UWAGA: Stosując nieco bardziej subtelne techniki pozwalające na uzyskanie dokładniejszych oszacowań i przeprowadzając żmudne obliczenia można pokazać, że

$$\mathbf{E}(B_n) = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Zadanie 4. (*Coupon collector's problem*) Niech C_n oznacza minimalną liczbę rzutów, po której nie ma już pustych urn.

(a) Wyznacz $\mathbf{E}(C_n)$ (podaj możliwie zwartą postać wzoru) oraz asymptotykę $\mathbf{E}(C_n)$ (podaj kolejne składniki w rozwinięciu asymptotycznym aż do $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$).

HINT: Podziel proces na n rund, gdzie k-ta runda rozpoczyna się w pierwszym momencie, w którym mamy $k-1$ niepustych urn i trwa do momentu, w którym wrzuciliśmy kulę do pewnej pustej urny (czyli do momentu zapełnienia kolejnej urny). Niech X_k będzie liczbą kul wrzuconych podczas k-tej rundy. Wyznacz rozkład zmiennych losowych X_k i wyraź C_n przy pomocy X_k.

(b) Wyznacz dokładny wzór na $\mathbf{var}\,(C_n)$ i pokaż, że $\mathbf{var}\,(C_n) \leqslant \frac{\pi^2}{6}\, n^2$.

HINT: Zauważ, że zmienne losowe X_k z podpunktu (a) są niezależne.

(c) Korzystając z nierówności Czebyszewa oraz ograniczenia górnego na wariancję z podpunktu (b) oszacuj $P(|C_n - \mathbf{E}\,(C_n)\,| \geqslant \alpha \cdot n\, H_n)$, gdzie α jest pewną dodatnią stałą, a H_n jest n-tą liczbą harmoniczną. Co na tej podstawie możesz powiedzieć o koncentracji zmiennej losowej C_n wokół wartości oczekiwanej?

★ **Zadanie 5.** (*Birthday paradox (cd.)*) Załóżmy, że w grupie m osób każda osoba ma urodziny niezależnie z jednakowym prawdopodobieństwem w każdym z 365 dni (dla uproszczenia zakładamy, że nie ma lat przestępnych). Niech A_m oznacza zdarzenie, że co najmniej dwie osoby z tej grupy mają urodziny tego samego dnia.

(a) Wyznacz $P(A_m)$ i oblicz jego wartość dla m równego liczbie osób obecnych na dzisiejszych zajęciach.

(b) Jaka jest najmniejsza wartość m, dla której $P(A_m) > 0.5$?

(c) Jak zmieni się odpowiedź w podpunkcie (b), jeśli rozważymy grupę m Marsjan?

★★ **Zadanie 6.** (*Osobliwy hazardzista*) W k-tym rzucie symetryczną monetą, $k \in \mathbb{Z}_+$, gracz wygrywa $0\,\$$, jeśli wypadła reszka oraz $\frac{2}{3^k}\,\$$, jeśli wypadł orzeł. Niech X oznacza łączną wygraną gracza w nieskończonym ciągu niezależnych rzutów tą monetą. Jaki rozkład ma zmienna losowa X? Czy jest to rozkład dyskretny, ciągły albo mieszany („dyskretno-ciągły”)?

HINT: Przeczytaj rozdział 7.1 z podręcznika G. Grimmet, D. Welsh, *Probability. An introduction*, 2nd Edition, Oxford University Press, 2014.