Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 0

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2024/2025

Lista powtórkowa na pierwsze ćwiczenia

Zadanie 1. Przypomnij wszystkie poznane warianty praw de Morgana.

Zadanie 2. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów skończonych A i B zachodzi $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Uogólnij powyższy wynik dla rodzin zbiorów skończonych $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ – przypomnij Zasadę Włączeń-Wyłączeń (Inclusion-Exclusion Principle).

Zadanie 3. Przypomnij definicję liczb harmonicznych.

(a) Pokaż, że $H_n = \ln n + \mathrm{O}(1)$.
HINT: Oszacuj szukaną sumę z dołu i z góry wykorzystując odpowiednie całki.

(b) Wyznacz postać zwartą sum $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$ oraz $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Zadanie 4. Wyznacz wzór na $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} k\, x^{k-1}$, gdzie $x \in (0,1)$, a następnie oblicz $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{k}{2^k}$.

Zadanie 5. Pokaż, że dla $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$, zachodzi $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big) \leqslant e^{-\frac{n-1}{2}}$.

Zadanie 6. Przypomnij pojęcie współczynnika dwumianowego i jego podstawowe własności (poniżej zakładamy, że $n, m, k \in \mathbb{N}$):

(a) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},\ 0 \leqslant k \leqslant n,$

(b) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},\ 1 \leqslant k \leqslant n$ (tożsamość Pascala),

(c) $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},\ 1 \leqslant k \leqslant n,$

(d) wzór dwumianowy; wyznacz $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ oraz $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$,

(e) $\displaystyle\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k},\ 0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n.$

Zadanie 7. Wyznacz postaci zwarte sum $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^a \binom{n}{k}$ dla $a = 1,\ 2$ oraz $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Zadanie 8. Oblicz, nie korzystając z żadnych pakietów matematycznych:

(a) $\int\limits_1^\infty x^{-a}\,dx$ dla $a > 1$,

(b) $\int\limits_0^\infty x\,e^{-2x}\,dx$ oraz $\int\limits_0^\infty x^2\,e^{-2x}\,dx$,

(c) $\int\limits_0^2 1 - |x-1|\,dx$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1 - \frac{a}{n}\Big)^{\lfloor n\,x\rfloor}$ dla $a, x > 0$,