Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 1

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2024/2025

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie σ-ciała podzbiorów zbioru $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

Zadanie 2. Ustalmy niepusty zbiór indeksów T (przeliczalny lub nieprzeliczalny). Niech $\mathcal{S}_i$, $i \in T$, będą σ-ciałami podzbiorów Ω. Pokaż, że $\mathcal{S} = \bigcap_{i \in T} \mathcal{S}_i$ jest także σ-ciałem podzbiorów Ω.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnej ustalonej rodziny $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru Ω istnieje najmniejsze (w sensie inkluzji) σ-ciało podzbiorów Ω zawierające $\mathcal{A}$.
HINT: Pokaż, że jest nim zdefiniowane na wykładzie σ-ciało generowane przez rodzinę $\mathcal{A}$, tj. $\sigma(\mathcal{A})$.

Zadanie 4. Niech $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Wyznacz najmniejsze σ-ciało podzbiorów przestrzeni Ω zawierające rodzinę $\{A, B\}$. Jaka jest moc tego σ-ciała? Pokaż przykład podzbioru Ω, który nie należy do tego σ-ciała.

Zadanie 5. Niech $\emptyset \neq A \subsetneq B \subsetneq \Omega$. Wyznacz ciało zbiorów generowane przez rodzinę $\{A, B\}$. [1]

Zadanie 6. Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ będzie skończoną rodziną podzbiorów przestrzeni Ω. Wyznacz σ-ciało $\sigma(\mathcal{A})$ generowane przez rodzinę $\mathcal{A}$. W tym celu wykonaj następujące kroki.

(a) Dla ciągów $\eta \in \{-1, 1\}^n$ zdefiniuj $A_\eta = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\eta_i}$, gdzie $A^1 = A$, $A^{-1} = A^C$.

(b) „Przyjrzyj się” tak określonym zbiorom A_η. Pokaż, że:

  i) jeśli $\eta, \tau \in \{-1, 1\}^n$, $\eta \neq \tau$, to $A_\eta \cap A_\tau = \emptyset$,

  ii) $\bigcup \{A_\eta \colon \eta \in \{-1, 1\}^n\} = \Omega$,

  iii) $A_i = \bigcup \{A_\eta \colon \eta \in \{-1, 1\}^n \wedge \eta_i = 1\}$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Dla $T \subseteq \{-1, 1\}^n$ oznaczmy $A_T = \bigcup_{\eta \in T} A_\eta$.

(d) Pokaż, że $\sigma(\mathcal{A}) = \{A_T \colon T \subseteq \{-1, 1\}^n\}$.

Zadanie 7. Niech $\mathcal{S}$ będzie σ-ciałem podzbiorów Ω i niech $A \subseteq \Omega$. Oznaczmy $\mathcal{S}_A = A \cap \mathcal{S} = \{A \cap B \colon B \in \mathcal{S}\}$.

(a) Pokaż, że $\mathcal{S}_A$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru A.

(b) Pokaż, że jeśli $A \in \mathcal{S}$, to $\mathcal{S}_A = \{B \in \mathcal{S} \colon B \subseteq A\}$.

Definicja. σ-ciało generowane przez rodzinę wszystkich otwartych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{Z}_+$, nazywamy **σ-ciałem zbiorów borelowskich** $\mathbb{R}^d$ i oznaczamy przez $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. [2]

Fakt. Niech $\mathcal{A}_1 = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ oraz $\mathcal{A}_2 = \{(a, b) \times (c, d) \colon a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$. Wówczas $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A}_1)$ oraz $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

[1] Przy okazji przypomnijmy, że jeśli ciało podzbiorów Ω jest skończone, to jest też σ-ciałem.
[2] Tą definicję możemy rozszerzyć na dowolne przestrzenie topologiczne.

Zadanie 8. Niech $\mathcal{B} = \mathcal{B}([0,1])$ oznacza rodzinę podzbiorów borelowskich odcinka $[0,1]$ i niech $\mathcal{S} = \{B \times [0,1] \colon B \in \mathcal{B}\}$.

(a) Pokaż, że $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru $[0,1]^2$ ($[0,1]^2 \equiv [0,1] \times [0,1]$).

(b) Podaj przykład podzbioru borelowskiego zbioru $[0,1]^2$, który nie należy do $\mathcal{S}$.

ZADANIA NIEOBOWIĄZKOWE

Na listach zadań mogą pojawiać się zadania oznaczone symbolem ★. Są to zadania nieobowiązkowe, ale niekoniecznie trudne. Zadania te można omawiać na ćwiczeniach „jak starczy czasu”, czyli po zrobieniu wszystkich zadań bez gwiazdki. Osoby zainteresowane tematyką szczególnie zachęcam do zastanowienia się nad rozwiązaniami tych zadań.

★ **Zadanie 9.** Pokaż przykład ciała zbiorów, które nie jest σ-ciałem.

★ **Zadanie 10.** Niech Ω będzie niepustym zbiorem i niech

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq \Omega \colon A \text{ jest przeliczalny lub } A^C \text{ jest przeliczalny}\}.$$

Pokaż, że:

(a) $\mathcal{C}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω,

(b) $\mathcal{C} = \sigma(\{\{x\} \colon x \in \Omega\})$.

Uwaga dot. nazewnictwa. Zbiór A taki, że A^C jest przeliczalny (ang. *countable)*, nazywamy zbiorem koprzeliczalnym (ang. *cocountable*). Podobnie, zbiór A taki, że A^C jest skończony, nazywamy zbiorem koskończonym (ang. *cofinite*).

★ **Zadanie 11.** Niech $\mathcal{S}$ będzie σ-ciałem podzbiorów Ω. Pokaż, że $\mathcal{S}$ jest albo skończony, albo nieprzeliczalny (innymi słowy, nie istnieją nieskończone przeliczalne σ-ciała).

★ **Zadanie 12.** Niech $A, B \in \mathcal{B}([0,1])$. Pokaż, że $A \times B \in \mathcal{B}([0,1]^2)$.
HINT: Zauważ, że $A \times B = (A \times [0,1]) \cap ([0,1] \times B)$.