Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 2

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2024/2025

Zadanie 1. Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Niech $A, B, C \in \mathcal{S}$. Pokaż, że

(a) $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$,

(b) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) + P(A \cap B \cap C)$.

(c) Niech $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$. Uogólnij powyższy wzór na $P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)$.

Zadanie 2. Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ i niech $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zdarzeń (elementów z σ-ciała $\mathcal{S}$). Pokaż, że:

(a) jeśli $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, to $P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$,

(b) jeśli $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, to $P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Zadanie 3. Rzucamy 2 razy sześcienną kostką do gry (kostka jest symetryczna, tj. każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny). Niech A oznacza zdarzenie „suma wyrzuconych oczek jest parzysta", a B oznacza zdarzenie „wypadła co najmniej jedna szóstka". Oblicz $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ oraz $P(A^C \cup B)$.

Zadanie 4. Pewien password cracker próbuje złamać hasło do systemu przez sprawdzenie 10^7 różnych losowych haseł spośród zbioru wszystkich dopuszczalnych haseł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że atak się powiedzie, jeśli wiadomo, że hasło musi składać się z:

(a) 6 różnych małych liter,

(b) 6 różnych małych i wielkich liter,

(c) dowolnych 6 liter (małych i wielkich),

(d) dowolnych 6 znaków obejmujących małe i wielkie litery oraz cyfry.

Zadanie 5. Oznaczmy $p_n = \alpha/n^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, gdzie α jest pewną stałą. Dla $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ niech $P(A) = \sum_{i\in A} p_i$.

(a) Wyznacz wartość parametru α, dla której P jest prawdopodobieństwem na przestrzeni $(\mathbb{Z}_+, \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+))$.

(b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ \colon n \leqslant 50\}$.

HINT: Do obliczeń w tym zadaniu (i nie tylko w tym) warto skorzystać z pakietu matematycznego typu *Mathematica* czy serwisu *WolframAlpha*.

Zadanie 6. Niech $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\Omega)$ będzie σ-ciałem podzbiorów borelowskich Ω oraz $P(A) = \lambda(A)/\pi$, gdzie $\lambda(A)$ oznacza powierzchnię[1] zbioru A. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Oblicz prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

(a) $A = \{(x, y) \in \Omega \colon x > 0\}$,

(b) $B = \{(x, y) \in \Omega \colon \frac{1}{3} < \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{2}\}$,

(c) $C = \{(x, x) \in \Omega \colon \frac{-\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

Zadanie 7. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i niech $\mathbb{S}_n$ będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Rozważmy kombinatoryczną przestrzeń probabilistyczną na zbiorze $\mathbb{S}_n$. Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia $A_n = \{\pi \in \mathbb{S}_n \colon (\forall i \in \{1, \ldots, n\})(\pi(i) \neq i)\}$ oraz wyznacz $\lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{|\mathbb{S}_n|}$ (A_n to podzbiór $\mathbb{S}_n$ składający się z nieporządków, czyli permutacji bez punktów stałych).

★ **Zadanie 8.** Nieskończenie wiele razy rzucamy niezależnie monetą, która daje orła z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$ i reszkę z prawdopodobieństwem $1 - p$. Niech A oznacza zdarzenie, że ani razu nie wypadł orzeł. Korzystając z zadania 2 pokaż, że $P(A) = 0$.

★ **Zadanie 9.** Rozważmy kombinatoryczną przestrzeń probabilistyczną na zbiorze wszystkich funkcji ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ w zbiór $\{1, \ldots, n\}$. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo zbioru funkcji różnowartościowych. Wyznacz p_n oraz asymptotykę liczb p_n .[2]

---

[1] Formalnie, miarę Lebesgue'a na płaszczyźnie.
[2] W tym celu możesz np. skorzystać ze wzoru Stirlinga.