Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 3

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2024/2025

Zadanie 1. Załóżmy, że test na wykrywanie narkotyków z prawdopodobieństwem $0{,}99$ prawidłowo potwierdza obecność narkotyku oraz z prawdopodobieństwem $0{,}99$ prawidłowo potwierdza jego brak. Przypuśćmy, że tylko $0{,}5\,\%$ populacji zażywa narkotyki. Załóżmy, że dla losowo wybranej osoby z tej populacji test wypadł pozytywnie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że testowana osoba rzeczywiście zażyła narkotyk? Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeśli rozważymy populację, w której $10\,\%$ osób zażywa narkotyki?

Zadanie 2. Wśród 100 symetrycznych monet jest jedna moneta o dwóch orłach. Wylosowano jedną monetę (każdą z jednakowym prawdopodobieństwem) i rzucono nią niezależnie 6 razy, za każdym razem otrzymując orła. Znając wynik przeprowadzonego eksperymentu, jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana moneta miała dwa orły?

Zadanie 3. (*Paradoks Monty'ego Halla*) Zawodnik stoi przed trzema zasłoniętymi drzwiami. Za jednymi z nich jest samochód (za którymi – wie to tylko prowadzący program). Za dwoma pozostałymi są kozy. Gracz wybiera jedne z trzech drzwi. Prowadzący program odsłania inne drzwi, za którymi stoi koza, po czym proponuje graczowi zmianę wyboru. Jaką decyzję powinien podjąć gracz, który chce wygrać samochód?

Zadanie 4. Odpowiedz na poniższe pytania (odpowiedzi uzasadnij).

(a) Kiedy zdarzenie A jest niezależne od zdarzenia A (czyli od siebie)?

(b) Kiedy zdarzenia rozłączne są niezależne?

Zadanie 5. Załóżmy, że zdarzenia A i B są niezależne.

(a) Pokaż, że wówczas zdarzenia A^C i B są niezależne. Wywnioskuj stąd, że niezależne są także zdarzenia A^C i B^C.

(b) Uogólnij powyższy wynik pokazując, że jeśli zdarzenia $A_1, \ldots A_n$ są niezależne, to dla każdego $\eta \in \{-1,1\}^n$ niezależna jest rodzina $\{A_1^{\eta_1}, \ldots, A_n^{\eta_n}\}$, gdzie $A^1 = A$ oraz $A^{-1} = A^C$.

Zadanie 6. Ustalmy $n \in \mathbb{Z}_+$ i niech $\Omega_n = \{0,1\}^{\{1,\ldots,n\}}$. Dla $A \subseteq \Omega_n$ określmy $P(A) = |A|/2^n$. Dla $i \in \{1,\ldots,n\}$ niech $A_i = \{(b_1,\ldots,b_n) \in \Omega_n \colon b_i = 1\}$. Pokaż, że zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne.

Zadanie 7. Rzucamy symetryczną monetą n razy (kolejne rzuty są niezależne). Niech A_{ij} oznacza zdarzenie, że i-ty oraz j-ty rzut dały takie same wyniki. Pokaż, że zdarzenia $\{A_{ij} \colon 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ są parami niezależne, ale nie są niezależne.

Zadanie 8. (*Próba ethernetowa*) Rozważmy n urządzeń, które próbują uzyskać dostęp do wspólnego zasobu (np. współdzielonego kanału komunikacyjnego). W tym celu każde urządzenie niezależnie od pozostałych losuje liczbę 0 lub 1, przy czym prawdopodobieństwo wylosowania 1 wynosi p. Urządzenia, które wylosują 1, wysyłają żądanie dostępu. Dostęp do zasobu otrzyma to urządzenie, które w danej próbie jako jedyne wylosuje 1 (w przypadku braku lub kilku wysłanych żądań, dostęp nie jest przydzielany żadnemu urządzeniu).

(a) Wyznacz prawdopodobieństwo sukcesu, tj. zdarzenia, że w pojedynczej próbie pewne urządzenie uzyska dostęp do zasobu.

(b) Wyznacz taką wartość $p \in (0, 1)$, dla której prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie jest jak największe. Ile wówczas wynosi to prawdopodobieństwo?

Zadanie 9. Niech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Ustalmy zbiór $B \in \mathcal{S}$ taki, że $P(B) > 0$. Niech $P_B(A) = P(A \mid B)$, $A \in \mathcal{S}$.

(a) Pokaż, że $(\Omega, \mathcal{S}, P_B)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

(b) Wyznacz $P_B(\Omega)$, $P_B(B)$ oraz $P_B(B^C)$.

(c) Niech $\mathcal{S}_B = B \cap \mathcal{S}$.[1] Pokaż, że $(B, \mathcal{S}_B, P_B)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

[1]patrz Zadanie 7 z Listy 1