Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 4

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2024/2025

Zadanie 1. Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X. Pokaż, że:

(a) F jest niemalejąca, tj. dla dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$ zachodzi $s \leqslant t \implies F_X(s) \leqslant F_X(t)$,

(b) $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ oraz $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$,

(c) F jest prawostronnie ciągła, tj. dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim_{t\to a^+} F(t) = F(a)$,

(d) $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$ dla dowolnych $a \leqslant b \in \mathbb{R}$.

Definicja 1. Zmienną losową X, której zbiór wartości (oznaczany przez $\operatorname{rng}(X)$) jest przeliczalny, nazywamy **dyskretną zmienną losową**.

Definicja 2. **Funkcją masy prawdopodobieństwa** (ang. *probability mass function, PMF*) dyskretnej zmiennej losowej X nazywamy funkcję[1] $p_X\colon \operatorname{rng}(X) \to [0,1]$ zadaną wzorem $p_X(x) = P(X = x)$.

Zadanie 2. Uzasadnij, że funkcja masy prawdopodobieństwa p_X jednoznacznie określa rozkład dyskretnej zmiennej losowej X (pokaż, jak wyznaczyć $P(X \in A)$ dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, a także wyraź dystrybuantę F_X zmiennej losowej X przy pomocy p_X).

Zadanie 3. Z talii 52 kart trzy razy wybieramy niezależnie i jednostajnie losowo kartę, za każdym razem zwracając wybraną kartę do talii. Niech X oznacza ile razy wybraliśmy kartę koloru $\clubsuit$. Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej X.

Zadanie 4. W pewnej grze losowej gracz typuje 5 spośród 40 liczb, po czym losowane jest 5 liczb (każdy wynik losowania jest jednakowo prawdopodobny). Jeśli gracz trafnie wytypował 3 liczby, to wygrywa $100\,\$$, jeśli 4, to $1\,000\,\$$, a jeśli 5, to $100\,000\,\$$. Niech X oznacza wygraną gracza w pojedynczej grze. Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

Zadanie 5. Niech X i Y oznaczają wyniki dwóch niezależnych rzutów sześcienną, symetryczną kostką do gry. Wyznacz funkcje masy prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty zmiennych losowych $U = X + Y$ oraz $V = \min\{X, Y\}$.

Zadanie 6. (*Indykatorowe zmienne losowe*) Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ i niech $A \in \mathcal{S}$. Zdefiniujmy

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \omega \in A \\ 0, & \text{jeśli } \omega \in \Omega \setminus A\,. \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja $\mathbb{1}_A$ jest zmienną losową i wyznacz jej dystrybuantę. Zmienną losową $\mathbb{1}_A$ nazywamy *indykatorową zmienną losową zdarzenia A*.

[1] PMF możemy rozszerzyć na dziedzinę $\mathbb{R}$ kładąc $p_X(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \operatorname{rng}(X)$.

Zadanie 7. Rozważmy następującą grę. Początkowo w urnie jest jedna czerwona i jedna zielona kula. W każdej rundzie wybieramy niezależnie i jednostajnie losowo kulę z urny i jeśli ta jest czerwona, to kończymy grę, a jeśli zielona, to wkładamy ją z powrotem do urny wraz z dodatkową zieloną kulą i kontynuujemy grę. Niech X oznacza długość gry (liczbę rund do jej zakończenia). Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa i dystrybuantę zmiennej losowej X.

Zadanie 8. Niech $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\Omega)$ oraz $P(A) = \lambda(A)/\pi$, gdzie $\lambda(A)$ oznacza powierzchnię (miarę Lebesgue'a) zbioru $A \in \mathcal{S}$. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$.

(a) Niech X będzie zmienną losową zdefiniowaną jako $X((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jaka jest interpretacja geometryczna zmiennej losowej X? Wyznacz dystrybuantę X i naszkicuj jej wykres.

(b) Kula o promieniu r w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ma objętość $C_n\, r^n$ dla pewnych stałych C_n (np. $C_1 = 2$, $C_2 = \pi$, $C_3 = \frac{4}{3}\pi$, $C_4 = \frac{\pi^2}{2}$). Uogólnij wynik z podpunktu (a) na kule w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 9. (*Rozkłady mieszane*)

(a) Pokaż, że jeśli funkcje $F_1(t)$ oraz $F_2(t)$ są dystrybuantami, to dla dowolnego $\alpha \in [0, 1]$ funkcja $F(t) = \alpha F_1(t) + (1 - \alpha)F_2(t)$ jest także dystrybuantą.

(b) Niech $F_1(t)$ będzie dystrybuantą zmiennej losowej X z zadania 8(a), a $F_2(t)$ dystrybuantą dyskretnej zmiennej losowej przyjmującej wartości 0 i $\frac{3}{2}$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ każda oraz wartość $\frac{1}{2}$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Wyznacz dystrybuantę $F(t) = \alpha F_1(t) + (1 - \alpha)F_2(t)$ dla $\alpha = \frac{1}{3}$ i naszkicuj wykresy $F_1(t)$, $F_2(t)$ oraz $F(t)$.

★ Zadanie 10. Niech $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rozbiciem przestrzeni Ω na zdarzenia i niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Oznaczmy $X = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, \mathbb{1}_{A_n}$. Pokaż, że X jest zmienną losową i wyznacz wzór na jej dystrybuantę.

★ Zadanie 11. Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ i niech $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową. Dla $A \in \mathcal{B}$ niech $P_X(A) = (P \circ X^{-1})(A) = P(X \in A)$ (P_X nazywamy rozkładem zmiennej losowej X). Pokaż, że $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

★ Zadanie 12. Niech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Pokaż, że jeśli $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Omega)$, to wszystkie funkcje odwzorowujące Ω na pewien przeliczalny podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ są dyskretnymi zmiennymi losowymi.