

Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 5

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2024 / 2025

UWAGA – Zadania z tej listy należy rozwiązywać w kolejności, w jakiej podane są na liście.

Zadanie 1. Rzucamy niezależnie cztery razy symetryczną monetą. Oznaczmy przez H liczbę wyrzuconych orłów, a przez T – liczbę reszek. Niech R oznacza liczbę różnych pierwiastków równania kwadratowego $x^2 - (H - T)x + H - T = 0$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej R .

Zadanie 2. Niech X będzie dyskretną zmienną losową z funkcją masy prawdopodobieństwa $P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$ dla $k \in \mathbb{Z}_+$ i niech $Y = \left| \sin\left(\frac{\pi X}{2}\right) \right|$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej Y .

Zadanie 3. Wybieramy losową liczbę z odcinka $[0, 1]$ zgodnie z rozkładem jednostajnym i podnosimy ją do kwadratu. Niech X oznacza wynik tej operacji. Wyznacz dystrybuantę i funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X oraz naszkicuj ich wykresy.

Zadanie 4. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym, której funkcja gęstości prawdopodobieństwa zadana jest wzorem $f(x) = \exp(-e^{-x} - x)$. Naszkicuj wykresy dystrybuanty i gęstości X .

Zadanie 5. Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X . Wyznacz dystrybuanty zmiennych losowych $Y = -X$, $Z = |X|$ oraz $U = X^2$.

Zadanie 6. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie ciągłym z gęstością f_X i niech $g(x) = \sqrt[3]{x}$ oraz $h(x) = e^{-x}$. Oznaczmy $Y = g(X)$ oraz $Z = h(X)$.

- Podaj wzory na funkcje gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty zmiennych losowych Y i Z w ogólnym przypadku.
- Wyznacz funkcje gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty zmiennych losowych Y i Z w przypadku, gdy dystrybuanta X zadana jest wzorem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ (t+1)/2, & t \in [-1, 1] \\ 1, & t > 1 \end{cases}.$$

★ **Zadanie 7.** (Uogólnienie zadania 6.) Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie ciągłym z dystrybuantą F_X i gęstością f_X i niech g będzie funkcją ściśle monotoniczną i różniczkowalną, określoną na całym zbiorze wartości X . Wyznacz wzory na dystrybuantę F_Y oraz gęstość f_Y zmiennej losowej $Y = g(X)$ (wyrażone przy pomocy F_X i f_X), gdy

- g jest ściśle rosnąca,
- g jest ściśle malejąca.

★ **Zadanie 8.** Załóżmy, że dystrybuanta F zmiennej losowej X jest ciągła i ściśle monotoniczna. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $Z = F(X)$. Podaj interpretację uzyskanego wyniku.