Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 6

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2024 / 2025

Zadanie 1. Rzucamy niezależnie dwoma sześciennymi, symetrycznymi kostkami. Niech X oznacza mniejszy, a Y większy z wyników rzutów (jeśli na obu kostkach wypadła taka sama liczba oczek k, przyjmujemy $X = Y = k$).

(a) Wyznacz rozkład łączy oraz rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y.

(b) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

(c) Oblicz $\mathbf{E}(X)$ oraz $\mathbf{E}(Y)$.

Zadanie 2. Niech $F(s,t)$ będzie (łączną) dystrybuantą wektora losowego (X,Y). Pokaż, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takich, że $a < b$ oraz $c < d$ zachodzi

$$P(a < X \leqslant b \wedge c < Y \leqslant d) = F(b,d) + F(a,c) - F(a,d) - F(b,c)\,.$$

Zadanie 3. Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennych losowych z zadań 1 i 3 z listy 5.

Zadanie 4. Niech X będzie zmienną losową przyjmującą wartości ze zbioru $\mathbb{Z}_+$. Wyznacz $\mathbf{E}(X)$ w przypadku, gdy:

(a) $P(X = k) = 2^{-k}$,

(b) $P(X = k) = \dfrac{6}{\pi^2}\dfrac{1}{k^2}$.

Zadanie 5. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą i.i.d.[1] zmiennymi losowymi z dystrybuantą F. Niech $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $Z = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(a) Wyznacz dystrybuanty zmiennych losowych Y oraz Z.

(b) Zakładając, że X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, są dyskretnymi zmiennymi losowymi z funkcją masy prawdopodobieństwa $P(X_i = k) = \dfrac{1}{N}$, $k \in \{1, \ldots, N\}$, wyznacz funkcje masy prawdopodobieństwa i wartości oczekiwane Y oraz Z.

(c) Zakładając, że X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, mają rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$, wyznacz funkcje gęstości prawdopodobieństwa i wartości oczekiwane Y oraz Z.

Zadanie 6. Niech $X : \Omega \to \mathbb{N}$ będzie dyskretną zmienną losową przyjmującą wartości w zbiorze liczb naturalnych. Pokaż, że $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$, o ile szereg po prawej stronie jest zbieżny.

★ **Zadanie 7.** Pokaż, że jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym z dystrybuantą F przyjmującą tylko nieujemne wartości, to $\mathbf{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(t))\,dt$, o ile ta całka istnieje.

[1] Skrót i.i.d. (ang. *independent and identically distributed*) oznacza niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie.