

Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 8

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2024/2025

Zadanie 1. Wyznacz wariancję zmiennych losowych Y i Z z zadania 5(c) z listy 6.

Zadanie 2. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, \pi]$, tj. rozkładzie z gęstością $f(t) = 1/\pi$ dla $t \in (0, \pi)$ oraz $f(t) = 0$ w p. p. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych losowych $Y = \sin X$ oraz $Z = \cos X$.

Zadanie 3. Niech $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Wyznacz wzór na momenty zmiennej losowej X , tj. $\mathbf{E}(X^k)$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 4. Niech X_1, \dots, X_n będą i.i.d. zmiennymi losowymi o rozkładzie $\text{Exp}(1)$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Uogólnij ten wynik na przypadek, gdy $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ dla pewnych dodatnich stałych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Zadanie 5. Niech X będzie zmienną losową o o rozkładzie arcusa sinusa, tj. rozkładzie ciągłym z dystrybuantą

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t < 0, \\ \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}), & \text{gdy } t \in [0, 1], \\ 1, & \text{gdy } t > 1. \end{cases}$$

- (a) Wyznacz gęstość $f(t)$ zmiennej losowej X .
- (b) Oblicz $\mathbf{E}(X)$ oraz $\text{var}(X)$.
- (c) Narysuj (np. przy pomocy jakiegoś pakietu matematycznego) wykres dystrybuanty $F(t)$ oraz gęstości $f(t)$.

★ **Zadanie 6.** Ustalmy $\lambda \in \mathbb{R}_+$ oraz $k \in \mathbb{Z}_+$ i niech $t > 0$. Rozważmy zmienne losowe $T \sim \text{Gamma}\left(k, \frac{1}{\lambda}\right)$ oraz $X \sim \text{Po}(\lambda t)$. Pokaż, że $P(T \leq t) = P(X \geq k)$.

★ **Zadanie 7.** (*memoryless property*) Niech $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Pokaż, że dla dowolnych $s, t \in \mathbb{R}_+$ zachodzi $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$.

★ **Zadanie 8.** Zmienna losowa ma rozkład Cauchy'ego z parametrami $a \in \mathbb{R}$ oraz $\gamma > 0$, jeśli jej gęstością jest funkcja

$$f_{a,\gamma}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(t - a)^2 + \gamma^2}.$$

- (a) Narysuj (np. przy pomocy jakiegoś pakietu matematycznego) wykres funkcji $f_{a,\gamma}$ dla różnych wartości parametrów a oraz γ .
- (b) Spróbuj wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej o rozkładzie Cauchy'ego.

★ **Zadanie 9.** Pokaż, że jeśli zmienna losowa o rozkładzie dyskretnym (odpowiednio, ciągłym) ma skończony k -ty moment $\mathbf{E}(X^k)$, to istnieją wszystkie jej momenty niższego rzędu $\mathbf{E}(X^j)$ dla $j \in \{1, \dots, k-1\}$.¹

★★ **Zadanie 10.** (*Osobliwy hazardzista*) W k -tym rzucie symetryczną monetą, $k \in \mathbb{Z}_+$, gracz wygrywa 0\$, jeśli wypadła reszka oraz $\frac{2}{3^k}$ \$, jeśli wypadł orzeł. Niech X oznacza łączną wygraną gracza w nieskończonym ciągu niezależnych rzutów tą monetą. Jaki rozkład ma zmienna losowa X ? Czy jest to rozkład dyskretny, ciągły albo mieszany („dyskretno-ciągły”)?

HINT: Przeczytaj rozdział 7.1 z podręcznika G. Grimmet, D. Welsh, *Probability. An introduction*, 2nd Edition, Oxford University Press, 2014.

¹Fakt ten jest prawdziwy dla dowolnych zmiennych losowych.