

Rachunek Prawdopodobieństwa

LISTA 0

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2025 / 2026

Lista powtórkowa na pierwsze ćwiczenia

Zadanie 1. Przypomnij wszystkie poznane warianty praw de Morgana.

Zadanie 2. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów skończonych A i B zachodzi $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Uogólnij powyższy wynik dla rodzin zbiorów skończonych $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ – przypomnij (bez szczegółowego dowodu) Zasadę Włączeń-Wyłączeń (*Inclusion-Exclusion Principle*).

Zadanie 3. Przypomnij definicję liczb harmoniczych.

(a) Pokaż, że $H_n = \ln n + O(1)$.

HINT: Oszacuj szukaną sumę z dołu i z góry wykorzystując odpowiednie całki.

(b) Wyznacz postać zwartą sum $\sum_{k=1}^n H_k$ oraz $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Zadanie 4. Wyznacz wzór na $\sum_{k \geq 1} k x^{k-1}$, gdzie $x \in (0, 1)$, a następnie oblicz $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{2^k}$.

Zadanie 5. Pokaż, że dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, zachodzi $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \leq e^{-\frac{n-1}{2}}$.

Zadanie 6. Przypomnij pojęcie współczynnika dwumianowego i jego podstawowe własności (poniżej zakładamy, że $n, m, k \in \mathbb{N}$):

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $0 \leq k \leq n$,

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $1 \leq k \leq n$ (tożsamość Pascala),

(c) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$, $1 \leq k \leq n$,

(d) wzór dwumianowy; wyznacz $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ oraz $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$,

(e) $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$, $0 \leq k \leq m \leq n$.

Zadanie 7. Wyznacz postaci zwarte sum $\sum_{k=0}^n k^a \binom{n}{k}$ dla $a = 1, 2$ oraz $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Zadanie 8. Oblicz, nie korzystając z żadnych pakietów matematycznych:

(a) $\int_1^{\infty} x^{-a} dx$ dla $a > 1$,

(b) $\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$ oraz $\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx$,

(c) $\int_0^2 1 - |x - 1| dx$,

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}$ dla $a, x > 0$.