

Rachunek Prawdopodobieństwa

LISTA 4

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2025 / 2026

Zadanie 1. Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X . Pokaż, że:

- (a) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ dla dowolnych $a \leq b \in \mathbb{R}$.
- (b) F jest prawostronnie ciągła, tj. dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim_{t \rightarrow a^+} F(t) = F(a)$.

Zadanie 2. W pewnej grze losowej gracz typuje 5 spośród 40 liczb, po czym losowane jest 5 liczb (każdy wynik losowania jest jednakowo prawdopodobny). Jeśli gracz trafnie wytypował 3 liczby, to wygrywa 100 \$, jeśli 4, to 1 000 \$, a jeśli 5, to 100 000 \$. Niech X oznacza wygraną gracza w pojedynczej grze. Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej X .

Zadanie 3. Niech X i Y oznaczają wyniki dwóch niezależnych rzutów sześcienną, symetryczną kostką do gry. Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty zmiennych losowych $U = X + Y$ oraz $V = \min\{X, Y\}$.

Zadanie 4. (*Indykatorowe zmienne losowe*) Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$.

- (a) Dla $A \in \mathcal{S}$ zdefiniujmy

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \omega \in A \\ 0, & \text{jeśli } \omega \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja $\mathbb{1}_A$ jest zmienną losową i wyznacz jej dystrybuantę. Zmienną losową $\mathbb{1}_A$ nazywamy *indykatorową zmienną losową zdarzenia* A .

- ★ (b) Niech $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rozbiciem przestrzeni Ω na zdarzenia i niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Oznaczmy $X = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbb{1}_{A_n}$. Uzasadnij, że X jest zmienną losową i wyznacz jej dystrybuantę.

Zadanie 5. Rozważmy następującą grę. Początkowo w urnie jest jedna czerwona i jedna zielona kula. W każdej rundzie wybieramy niezależnie i jednostajnie losowo kulę z urny i jeśli ta jest czerwona, to kończymy grę, a jeśli zielona, to wkładamy ją z powrotem do urny wraz z dodatkową zieloną kulą i kontynuujemy grę. Niech X oznacza długość gry (liczbę rund do jej zakończenia). Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa i dystrybuantę zmiennej losowej X .

Zadanie 6. Niech $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\Omega)$ oraz $P(A) = \lambda(A)/\pi$, gdzie $\lambda(A)$ oznacza powierzchnię (miarę Lebesgue'a) zbioru $A \in \mathcal{S}$. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$.

- (a) Niech X będzie zmienną losową zdefiniowaną jako $X((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jaka jest interpretacja geometryczna zmiennej losowej X ? Wyznacz dystrybuantę X i naszkicuj jej wykres.

- (b) Kula o promieniu r w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ma objętość $C_n r^n$ dla pewnych stałych C_n (np. $C_1 = 2, C_2 = \pi, C_3 = \frac{4}{3}\pi, C_4 = \frac{\pi^2}{2}$). Uogólnij wynik z podpunktu (a) na kule w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 7. (*Rozkłady mieszane*)

- (a) Pokaż, że jeśli funkcje $F_1(t)$ oraz $F_2(t)$ są dystrybuantami, to dla dowolnego $\alpha \in [0, 1]$ funkcja $F(t) = \alpha F_1(t) + (1 - \alpha)F_2(t)$ jest także dystrybuantą.
- (b) Niech $F_1(t)$ będzie dystrybuantą zmiennej losowej X z zadania 6(a), a $F_2(t)$ dystrybuantą dyskretnej zmiennej losowej przyjmującej wartości 0 i $\frac{3}{2}$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ każda oraz wartość $\frac{1}{2}$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Wyznacz dystrybuantę $F(t) = \alpha F_1(t) + (1 - \alpha)F_2(t)$ dla $\alpha = \frac{1}{3}$ i naszkicuj wykresy $F_1(t)$, $F_2(t)$ oraz $F(t)$.

★ **Zadanie 8.** Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ i niech $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zmienną losową. Dla $A \in \mathcal{B}$ niech $P_X(A) = (P \circ X^{-1})(A) = P(X \in A)$ (P_X nazywamy rozkładem zmiennej losowej X). Pokaż, że $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

★ **Zadanie 9.** Niech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Pokaż, że jeśli $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Omega)$, to wszystkie funkcje odwzorowujące Ω na pewien przeliczalny podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ są dyskretnymi zmiennymi losowymi.