

Rachunek Prawdopodobieństwa

LISTA 5

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2025 / 2026

Zadanie 1. Niech X będzie dyskretną zmienną losową z funkcją masy prawdopodobieństwa $P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$ dla $k \in \mathbb{Z}_+$ i niech $Y = \left| \sin\left(\frac{\pi X}{2}\right) \right|$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej Y .

Zadanie 2. Wybieramy losową liczbę z odcinka $[0, 1]$ zgodnie z rozkładem jednostajnym i podnosimy ją do kwadratu. Niech X oznacza wynik tej operacji. Wyznacz dystrybuantę i funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X oraz naszkicuj ich wykresy.

Zadanie 3. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym, której funkcja gęstości prawdopodobieństwa zadana jest wzorem $f(x) = \exp(-e^{-x} - x)$. Naszkicuj wykresy dystrybuanty i gęstości X .

Zadanie 4. Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X . Wyznacz dystrybuanty zmiennych losowych $Y = -X$, $Z = |X|$ oraz $U = X^2$.

Zadanie 5. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie ciągłym z gęstością f_X i niech $g(x) = \sqrt[3]{x}$ oraz $h(x) = e^{-x}$. Oznaczmy $Y = g(X)$ oraz $Z = h(X)$.

- (a) Podaj wzory na funkcje gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty zmiennych losowych Y i Z w ogólnym przypadku.
- (b) Wyznacz funkcje gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty zmiennych losowych Y i Z w przypadku, gdy dystrybuanta X zadana jest wzorem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ (t+1)/2, & t \in [-1, 1] \\ 1, & t > 1 \end{cases}.$$

Zadanie 6. Załóżmy, że dystrybuanta F zmiennej losowej X jest ciągła i ściśle monotoniczna. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $Z = F(X)$. Zinterpretuj uzyskany wynik.

Zadanie 7. Niech $X_1, \dots, X_n$ będą i.i.d.¹ zmiennymi losowymi z dystrybuantą F . Niech $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ oraz $Z = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

- (a) Wyznacz dystrybuanty zmiennych losowych Y oraz Z .
- (b) Zakładając, że $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$, są dyskretnymi zmiennymi losowymi z funkcją masy prawdopodobieństwa $P(X_i = k) = \frac{1}{N}, k \in \{1, \dots, N\}$, wyznacz funkcje masy prawdopodobieństwa Y oraz Z .
- (c) Zakładając, że $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$, mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$, wyznacz funkcje gęstości prawdopodobieństwa Y oraz Z .

¹Skrót i.i.d. (ang. *independent and identically distributed*) oznacza niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie.

Zadanie 8. Rzucamy niezależnie dwoma sześciennymi, symetrycznymi kostkami. Niech X oznacza mniejszy, a Y większy z wyników rzutów (jeśli na obu kostkach wypadła taka sama liczba oczek k , przyjmujemy $X = Y = k$).

- (a) Wyznacz rozkład łączny oraz rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y .
- (b) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.