

Rachunek Prawdopodobieństwa

LISTA 6

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2025 / 2026

Zadanie 1. Wyznacz wartość oczekiwaną następujących zmiennych losowych z listy 5:

- (a) X oraz Y z zadania 8,
- (b) Y oraz Z z zadania 5(b),
- (c) Y oraz Z z zadania 7(c).

Zadanie 2. Niech X będzie zmienną losową przyjmującą wartości ze zbioru $\mathbb{Z}_+$. Wyznacz $\mathbf{E}(X)$ w przypadku, gdy:

- (a) $P(X = k) = 2^{-k}$,
- (b) $P(X = k) = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}$.

Zadanie 3. Niech $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ będzie dyskretną zmienną losową przyjmującą wartości w zbiorze liczb naturalnych. Pokaż, że $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$, o ile szereg po prawej stronie jest zbieżny.

Zadanie 4. Pokaż przykład dyskretnych zmiennych losowych X i Y , które nie są niezależne, ale zachodzi $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y)$.

Zadanie 5. Wyznacz wariancję zmiennych losowych z podpunktów (a) i (c) z zadania 1.

Zadanie 6. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, \pi]$, tj. rozkładzie z gęstością $f(t) = 1/\pi$ dla $t \in (0, \pi)$ oraz $f(t) = 0$ w p. p. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych losowych $Y = \sin X$ oraz $Z = \cos X$.

★ **Zadanie 7.** Pokaż, że jeśli zmienna losowa X o rozkładzie ciągłym z dystrybuantą F przyjmuje tylko nieujemne wartości, to $\mathbf{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt$, o ile ta całka istnieje.

★★ **Zadanie 8.** (*Osobliwy hazardzista*) W k -tym rzucie symetryczną monetą, $k \in \mathbb{Z}_+$, gracz wygrywa 0 \$, jeśli wypadła reszka oraz $\frac{2}{3^k}$ \$, jeśli wypadł orzeł. Niech X oznacza łączną wygraną gracza w nieskończonym ciągu niezależnych rzutów tą monetą. Jaki rozkład ma zmienna losowa X ? Czy jest to rozkład dyskretny, ciągły albo mieszany („dyskretno-ciągły”)?

HINT: Przeczytaj rozdział 7.1 z podręcznika G. Grimmet, D. Welsh, *Probability. An introduction*, 2nd Edition, Oxford University Press, 2014.