

Rachunek Prawdopodobieństwa

LISTA 7

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2025 / 2026

Zadanie 1. Niezależnie powtarzamy próbę ethernetową z optymalną wartością parametru p aż do pierwszego momentu, w którym dowolne z urządzeń uzyska dostęp do zasobu (patrz zadanie 8 z listy 3). Jaki rozkład ma zmienna losowa reprezentująca liczbę wykonanych powtórzeń? Korzystając z wcześniej wyznaczonych wzorów, oblicz jej wartość oczekiwaną i wariancję.

Zadanie 2. Źródło generuje losową liczbę N pakietów zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ . Każdy pakiet dociera do celu niezależnie z prawdopodobieństwem p . Wyznacz rozkład liczby pakietów, które dotrą do celu.

Zadanie 3. Niech $X \sim \text{Geo}(p)$ oraz $Y \sim \text{Geo}(r)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Z = \min\{X, Y\}$.

Zadanie 4. (*Własność braku pamięci, ang. memoryless property*) Niech $X \sim \text{Geo}(p)$. Pokaż, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi $P(X = n + m \mid X > m) = P(X = n)$. Zaproponuj rozsądną interpretację tego faktu.

Zadanie 5. Niech $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Wyznacz wzór na momenty zmiennej losowej X , tj. $E(X^k)$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 6. Niech $X_1, \dots, X_n$ będą i.i.d. zmiennymi losowymi o rozkładzie $\text{Exp}(1)$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Uogólnij ten wynik na przypadek, gdy $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ dla pewnych dodatnich stałych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Zadanie 7. Niech X będzie zmienną losową o o rozkładzie arcusa sinusa, tj. rozkładzie ciągłym z dystrybuentą

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t < 0, \\ \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}), & \text{gdy } t \in [0, 1], \\ 1, & \text{gdy } t > 1. \end{cases}$$

- (a) Wyznacz gęstość $f(t)$ zmiennej losowej X .
- (b) Oblicz $E(X)$ oraz $\text{var}(X)$.
- (c) Narysuj (np. przy pomocy jakiegoś pakietu matematycznego) wykresy dystrybuenty $F(t)$ oraz gęstości $f(t)$.

Zadanie 8. Zmienna losowa ma rozkład Cauchy'ego z parametrami $a \in \mathbb{R}$ oraz $\gamma > 0$, jeśli jej gęstością jest funkcja

$$f_{a,\gamma}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(t - a)^2 + \gamma^2}.$$

- (a) Narysuj wykres funkcji $f_{a,\gamma}$ dla różnych wartości parametrów a oraz γ .
- (b) Spróbuj wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej o rozkładzie Cauchy'ego.

★ **Zadanie 9.** (*memoryless property*) Niech $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Pokaż, że dla dowolnych $s, t \in \mathbb{R}_+$ zachodzi $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$.

★ **Zadanie 10.** Ustalmy $\lambda \in \mathbb{R}_+$ oraz $k \in \mathbb{Z}_+$ i niech $t > 0$. Rozważmy zmienne losowe $T \sim \text{Gamma}\left(k, \frac{1}{\lambda}\right)$ oraz $X \sim \text{Po}(\lambda t)$. Pokaż, że $P(T \leq t) = P(X \geq k)$.