

Rachunek Prawdopodobieństwa

★ LISTA 7^{1/2}

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2025 / 2026

UWAGA – Jest to lista dodatkowa. Zadania z tej listy omawiamy na zajęciach jeśli mamy pewność, że do końca semestru zdążymy przerobić wszystkie zadania bez ★ z pozostałych list.

W poniższych zadaniach rozważamy model z zadania domowego 2 – zakładamy, że kule wrzucane są niezależnie i jednostajnie losowo do n ponumerowanych urn.

Zadanie 1. Niech U_n^m oznacza liczbę pustych urn po wrzuceniu m kul.

- (a) Wyznacz $\mathbf{E}(U_n^m)$.
- (b) Oznaczmy $u_1(n) = \mathbf{E}(U_n^n)$ oraz $u_2(n) = \mathbf{E}(U_n^m)$ dla $m = n \ln n$. Wyznacz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1(n)}{n}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_2(n)}{n}$.

Zadanie 2. (*Birthday paradox*) Niech B_n oznacza moment pierwszej kolizji.

- (a) Wyznacz wzór na $\mathbf{E}(B_n)$.
HINT: Wyznacz $P(B_n > k)$ dla $k \in \mathbb{N}$ i skorzystaj z zadania 3 z listy 6.
- (b) Korzystając z podobnych oszacowań jak w zadaniu 5 z listy 0, wyprowadź ograniczenie górne na $\mathbf{E}(B_n)$ postaci $\alpha + \sum_k e^{f(n,k)}$, gdzie α jest pewną stałą, a f funkcją n i k . Następnie oszacuj z góry otrzymaną sumę przed odpowiednią całką i wyznacz ograniczenie górne na wartość oczekiwaną momentu pierwszej kolizji postaci $\mathbf{E}(B_n) \leq an^b + c$ dla odpowiednich stałych a , b i c .

HINT: Do obliczenia całki, która pojawi się we wzorze, użyj wybranego pakietu matematycznego lub skorzystaj z faktu, że $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

UWAGA: Stosując nieco bardziej subtelne techniki pozwalające na uzyskanie dokładniejszych oszacowań i przeprowadzając żmudne obliczenia można pokazać, że

$$\mathbf{E}(B_n) = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

- (c) Załóżmy, że każda z m osób ma urodziny niezależnie z jednakowym prawdopodobieństwem w każdym z 365 dni (przyjmijmy, że nie ma lat przestępnych). Niech A_m oznacza zdarzenie, że co najmniej dwie osoby mają urodziny tego samego dnia. Wyznacz $P(A_m)$ i oblicz jego wartość dla m równego liczbie osób obecnych na dzisiejszych zajęciach. Jaka jest najmniejsza wartość m , dla której $P(A_m) > 0,5$?

Zadanie 3. (*Coupon collector's problem*) Niech C_n oznacza minimalną liczbę rzutów, po której nie ma już pustych urn.

- (a) Wyznacz $\mathbf{E}(C_n)$ (podaj możliwie zwartą postać wzoru) oraz asymptotykę $\mathbf{E}(C_n)$ (podaj kolejne składniki w rozwinięciu asymptotycznym aż do $O\left(\frac{1}{n}\right)$).

HINT: Podziel proces na n rund, gdzie k -ta runda rozpoczyna się w pierwszym momencie, w którym mamy $k - 1$ niepustych urn i trwa do momentu, w którym wrzuciliśmy kulę do pewnej pustej urny (czyli do momentu zapełnienia kolejnej urny). Niech X_k będzie liczbą kul wrzuconych podczas k -tej rundy. Wyznacz rozkład zmiennych losowych X_k i wyraż C_n przy pomocy X_k .

- (b) Wyznacz dokładny wzór na $\mathbf{var}(C_n)$ i pokaż, że $\mathbf{var}(C_n) \leq \frac{\pi^2}{6} n^2$.

HINT: Zauważ, że zmienne losowe X_k z punktu (a) są niezależne.

- (c) Korzystając z nierówności Czebyszewa oraz ograniczenia górnego na wariancję z punktu (b) oszacuj $P(|C_n - \mathbf{E}(C_n)| \geq \alpha \cdot n H_n)$, gdzie α jest pewną dodatnią stałą, a H_n jest n -tą liczbą harmoniczną. Co na tej podstawie możesz powiedzieć o koncentracji zmiennej losowej C_n wokół wartości oczekiwanej?