

Rachunek Prawdopodobieństwa

LISTA 8

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2025 / 2026

UWAGA – W przykładach odnoszących się do zadań z poprzednich list należy korzystać z tego, co zostało już wcześniej wyznaczone, bez ponownego wykonywania obliczeń.

Zadanie 1. Niech R oznacza IQ losowo spotkanej osoby na ulicy. Załóżmy, że wiadomo, iż $E(R) = 100$ oraz $\text{var}(R) = 100$. Zastosuj nierówność Markowa oraz Czebyszewa do oszacowania z góry $P(R \geq 200)$.

Zadanie 2. Pokaż, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ t. że $ac \neq 0$ współczynnik korelacji $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ spełnia $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$.

Zadanie 3. Rzucamy niezależnie dwoma sześciennymi, symetrycznymi kostkami. Niech X oznacza mniejszy, a Y większy z wyników rzutów (jak w zadaniu 8 z listy 5). Oblicz $\text{cov}(X, Y)$ oraz $\rho(X, Y)$.

Zadanie 4. Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $U([0, 1])$. Niech $Y = \min\{X_1, X_2\}$ oraz $Z = \max\{X_1, X_2\}$ (patrz zadania 7(c) z listy 5 oraz 1(c) i 5 z listy 6). Oblicz $\text{cov}(X, Y)$ oraz $\rho(X, Y)$.

Zadanie 5. Niech $X \sim U([0, \pi])$ i niech $Y = \sin X$ oraz $Z = \cos X$ (jak w zadaniu 6 z listy 6). Czy zmienne losowe Y i Z są niezależne? Czy są nieskorelowane¹?

Zadanie 6.

- (a) Wyznacz funkcję tworzącą prawdopodobieństwo (PGF) oraz funkcję tworzącą momenty (MGF) zmiennej losowej $X \sim \text{Geo}(p)$.
- (b) Oblicz $E(X)$ i $\text{var}(X)$ korzystając z PGF oraz MGF wyznaczonych w punkcie (a).
- (c) Korzystając z własności funkcji tworzących dla sumy niezależnych zmiennych losowych podaj wzory na PGF oraz MGF zmiennej losowej o rozkładzie ujemnym dwumianowym $\text{NB}(k, p)$.

Zadanie 7.

- (a) Wyznacz MGF zmiennej losowej o standardowym rozkładzie normalnym.
- (b) Uogólnij wynik z punktu (a) na zmienne losowe o rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dla dowolnych μ oraz $\sigma^2 > 0$.
HINT: Skorzystaj z faktu, że jeśli $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, to $\sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ oraz własności MGF podanych na wykładzie.
- (c) Korzystając z własności MGF pokaż, że jeśli $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ oraz $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym, to $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

¹Zmienne losowe X i Y nazywamy nieskorelowanymi, jeśli $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Zadanie 8. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym $\text{Exp}(\lambda)$. Wyznacz funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X + Y$.

★ **Zadanie 9.** Wyznacz funkcje charakterystyczne zmiennych losowych $X \sim \text{Bin}(n, p)$ oraz $Y \sim \text{Po}(\lambda)$.

★ **Zadanie 10.** Pokaż, że funkcja charakterystyczna zmiennej losowej $X \sim U([-1, 1])$ zadana jest wzorem $\phi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$ dla $t \neq 0$ oraz $\phi_X(0) = 1$.