

Rachunek Prawdopodobieństwa

LISTA 9

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2025 / 2026

UWAGA — Jest to lista **do samodzielnego przerobienia**. Obejmuje ona wybrane zagadnienia poruszane na wykładach 12–15. Zasadniczym celem tej listy jest ułatwienie samodzielnej pracy nad opanowaniem materiału omawianego na stycznych wykładach.

ZADANIA PODSTAWOWE

Jedno z zadań na egzaminie może być podobne do jednego z zadań podstawowych („bez gwiazdki”). Rozwiązania większości z nich były / będą omówione na stycznych wykładach.

Zadanie 1. (*Normal approximation to binomial distribution*) Niech $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

- (a) Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego oszacuj prawdopodobieństwo tego, że X odchyli się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż $3\sigma_X$, gdzie $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$. Czy takie oszacowanie „ma sens” dla dowolnych wartości n ?
- (b) Porównaj to oszacowanie z ograniczeniem uzyskanym przy pomocy nierówności Czebyszewa oraz dokładną wartością szacowanego prawdopodobieństwa dla $n = 1000$ oraz $p = 1/2$.

HINT: Przeanalizuj odpowiedni przykład ze slajdów do wykładów 12 i 13 oraz przeczytaj rozdział 4.3 z podręcznika M. Baron, *Probability and Statistics for Computer Scientists*, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, 2013.

Zadanie 2. (*Statistical sampling*) W wyborach o fotel prezydenta ubiega się dwóch kandydatów – R i K . Chcemy oszacować frakcję p wyborców popierających R . W tym celu wybieramy losową próbę n wyborców (zakładamy, że każdy wyborca jest wybierany do sondażu niezależnie z jednakowym prawdopodobieństwem, nie odmawia odpowiedzi i mówi prawdę) i jako estymator wartości p przyjmujemy frakcję $\hat{p}$ osób z wybranej próby, które popierają R .

Jak, w oparciu o centralne twierdzenie graniczne, dobrać wielkość próby n , żeby z prawdopodobieństwem $\geq 1 - \alpha$ pomylić się o $\leq \varepsilon$ dla zadanych α i ε ? Oszacuj minimalne wartości n dla $\alpha = 0,05$ i $\varepsilon = 0,05$ oraz $\varepsilon = 0,01$.

HINT: Przeczytaj rozdział 8.3 z podręcznika G. Grimmet, D. Welsh, *Probability. An introduction*, 2nd Edition, Oxford University Press, 2014 oraz rozdział 5.3.1 z podręcznika M. Baron, *Probability and Statistics for Computer Scientists*, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, 2013 (warto zajrzeć też do rozdz. 8.1, 9.2 (wprowadzenie), 9.3.2 i 9.3.3)

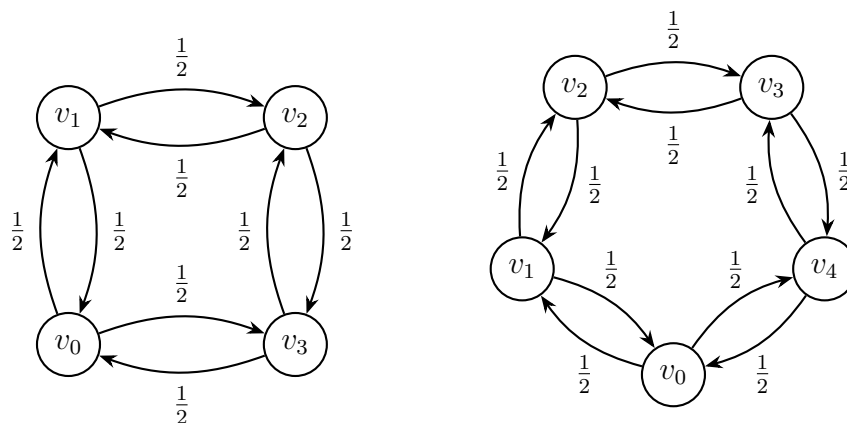
Zadanie 3. (*Przykład z wykładu 12.*) Ustalmy $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 = \lfloor \lambda \rfloor + 1$ niech $X_n \sim \text{Geo}(p_n)$, gdzie $p_n = \frac{\lambda}{n}$ i niech $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Pokaż, że ciąg $(Y_n)_{n \geq n_0}$ jest zbieżny według rozkładu i wyznacz rozkład graniczny.

Zadanie 4. (Egzamin 2024/25 – II termin) Zmienna losowa X ma rozkład Gumbela z parametrami $\alpha = 0$ i $\beta = 1$, co oznaczamy $X \sim \text{Gumbel}(0, 1)$, jeśli jej funkcja gęstości prawdopodobieństwa zadana jest wzorem $f_X(t) = \exp(-e^{-t} - t)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Niech $Y_n, n \geq 1$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym $\text{Exp}(1)$. Niech ponadto $M_n = \max\{Y_i: 1 \leq i \leq n\}$ oraz $X_n = M_n - \ln n$. Pokaż, że $X_n \xrightarrow{d} X$, gdzie $X \sim \text{Gumbel}(0, 1)$.

Zadanie 5. Niech $\mathbf{X} = (X_n: n \in \mathbb{N})$ będzie łańcuchem Markowa opisującym proste błędzenie losowe (spacer losowy) na grafie cyklicznym (cyklu) $C_k, k \in \mathbb{N}$, którego diagramy przejścia dla $k = 4$ i $k = 5$ przedstawia rysunek 1. Wykonaj poniższe zadania dla $k = 4$ i $k = 5$ oraz uogólnij wyniki dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

- Podaj macierz przejścia $\mathbf{P}$ łańcucha Markowa $\mathbf{X}$.
- Wyznacz $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3$ oraz $\mathbf{P}^4$. Jaką postać będzie miała macierz $\mathbf{P}^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$? Jak możemy zinterpretować te macierze?
- Oblicz prawdopodobieństwo tego, że znajdziemy się w wierzchołku v_0 po 1, 2, 3 i 4 krokach, jeśli w chwili $n = 0$ rozpoczynamy spacer losowy w wierzchołku v_0 . Uogólnij te wyniki dla dowolnej liczby kroków $n \in \mathbb{N}$.
- Jak zmieniają się prawdopodobieństwa obliczone w punkcie (c), jeśli z prawdopodobieństwem $1/2$ zaczynamy spacer losowy albo w v_0 , albo w v_1 ?
- Czy łańcuch Markowa $\mathbf{X}$ jest nieredukowalny? Czy jest nieokresowy? Czy zależy to od parzystości k ?
- Wyznacz rozkład stacjonarny π łańcucha Markowa $\mathbf{X}$ (tj. rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni stanów zadany przez wektor π spełniający $\pi\mathbf{P} = \pi$). Czy jest on określony jednoznacznie? Czy dla dowolnego rozkładu początkowego π_0 rozkład π_n w chwili n zbiega do rozkładu stacjonarnego wraz z $n \rightarrow \infty$?



Rysunek 1: Diagramy przejść dla łańcuchów Markowa z zadania 5.

ZADANIA DODATKOWE

Poniższe zadania „z gwiazdką” są nieobowiązkowe. Ich znajomość nie będzie wymagana na egzaminie.

★ **Zadanie 6.** (*Statistical sampling (cont.)*) Załóżmy, że metoda z zadania 2 zwróciła zbyt małą wartość n , żeby aproksymacja rozkładu dwumianowego przez rozkład normalny była wiarygodna. Zaproponuj alternatywne podejście do wyznaczenia rozmiaru losowej próby n oparte o nierówność Czebyszewa.

HINT: Rozwiązanie znajdziesz w rozdziale 5.3.1 z podręcznika M. Baron, *Probability and Statistics for Computer Scientists*, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, 2013.

★ **Zadanie 7.** (*Przykład z wykładu 12.*) Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue’a. Niech $X_n(\omega) = n \cdot \mathbb{1}\left\{\omega \in \left[0, \frac{1}{n}\right]\right\}$ i niech $X(\omega) = 0$ dla $\omega \in [0, 1]$. Pokaż, że $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

★ **Zadanie 8.** Ustalmy $\lambda > 0$. Niech $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$, gdzie $p_n = \frac{\lambda}{n}$ i niech $X \sim \text{Po}(\lambda)$. Korzystając z twierdzenia Lévy’ego o ciągłości pokaż, że $X_n \xrightarrow{d} X$.

★ **Zadanie 9.** (*Zbieżność względem momentów*) Niech $X, X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą zmiennymi losowymi o skończonych p -tych momentach dla pewnego $p \geq 1$, tj. $\mathbf{E}(|X|^p) < \infty$ oraz $\mathbf{E}(|X_n|^p) < \infty$ dla każdego $n \geq 1$. Mówimy, że ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ jest **zbieżny względem p -tych momentów**¹ do X , co oznaczamy $X_n \xrightarrow{L^p} X$, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(|X_n - X|^p) = 0$. Można pokazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{L^p} X$ dla pewnego $p \geq 1$, to w szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X)$.

(a) Niech $X_n \sim U\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right)$, $n \geq 1$. Pokaż, że $X_n \xrightarrow{L^p} 0$ dla dowolnego $p \geq 1$.

(b) Pokaż, korzystając z nierówności Markowa, że jeśli $X_n \xrightarrow{L^p} X$ dla pewnego $p \geq 1$, to $X_n \xrightarrow{P} X$.

(c) Podaj przykład ciągu zmiennych losowych zbieżnych według prawdopodobieństwa, ale nie względem wartości oczekiwanych, tj. ciągu $(X_n)_{n \geq 1}$ takiego, że $X_n \xrightarrow{P} X$ dla pewnej zmiennej losowej X , ale $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(X_n) \neq \mathbf{E}(X)$.

★ **Zadanie 10.** Korzystając z nierówności Cauchy’ego-Schwarza pokaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{L^p} X$ dla $p = 2$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X)$.

¹W literaturze zbieżność ta nazywana jest również zbieżnością w przestrzeni L^p i jest definiowana dla dowolnych $p > 0$.