Rachunek Prawdopodobieństwa

LISTA 3

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2026 / 2027

Zadanie 1. Załóżmy, że filtr antyspamowy z prawdopodobieństwem $0{,}99$ prawidłowo wykrywa wiadomość będącą spamem oraz z prawdopodobieństwem $0{,}99$ prawidłowo potwierdza, że nim nie jest. Przypuśćmy, że tylko $0{,}5\,\%$ przychodzących wiadomości to spam. Załóżmy, że pewna losowo wybrana przychodząca wiadomość została zaklasyfikowana jako spam. Jakie jest prawdopodobieństwo, że to był rzeczywiście spam? Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeśli rozważymy przypadek, w którym $10\,\%$ przychodzących wiadomości jest spamem?

Zadanie 2. Wśród 100 symetrycznych monet jest jedna moneta o dwóch orłach. Wylosowano jedną monetę (każdą z jednakowym prawdopodobieństwem) i rzucono nią niezależnie 6 razy, za każdym razem otrzymując orła. Znając wynik przeprowadzonego eksperymentu, jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana moneta miała dwa orły?

Zadanie 3. (*Paradoks Monty'ego Halla*) Zawodnik stoi przed trzema zasłoniętymi drzwiami. Za jednymi z nich jest samochód (za którymi – wie to tylko prowadzący program). Za dwoma pozostałymi są kozy. Gracz wybiera jedne z trzech drzwi. Prowadzący program odsłania inne drzwi, za którymi stoi koza, po czym proponuje graczowi zmianę wyboru. Jaką decyzję powinien podjąć gracz, który chce wygrać samochód?

Zadanie 4. Odpowiedz na poniższe pytania (odpowiedzi uzasadnij).

(a) Kiedy zdarzenie A jest niezależne od zdarzenia A (czyli od siebie)?

(b) Kiedy zdarzenia rozłączne są niezależne?

Zadanie 5. Załóżmy, że zdarzenia A i B są niezależne. Pokaż, że wówczas zdarzenia A^C i B są niezależne. Wywnioskuj stąd, że niezależne są także zdarzenia A i B^C oraz A^C i B^C.

Zadanie 6. Ustalmy $n \in \mathbb{Z}_+$ i niech $\Omega_n = \{0,1\}^{\{1,\ldots,n\}}$. Dla $A \subseteq \Omega_n$ określmy $P(A) = |A|/2^n$. Niech $A_i = \{(b_1,\ldots,b_n) \in \Omega_n \colon b_i = 1\}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Czy zdarzenia $A_1,\ldots,A_n$ są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 7. Rzucamy niezależnie dwoma sześciennymi, symetrycznymi kośćmi do gry. Niech A oznacza zdarzenie, że na pierwszej wypadła nieparzysta liczba oczek, B – zdarzenie, że na drugiej wypadła parzysta liczba oczek, a C – zdarzenie, że albo na obu kościach wypadła parzysta, albo na obu wypadła nieparzysta liczba oczek. Pokaż, że zdarzenia A, B i C są parami niezależne, ale nie są niezależne.

Zadanie 8. (*Próba ethernetowa*) Rozważmy n urządzeń, które próbują uzyskać dostęp do wspólnego zasobu (np. współdzielonego kanału komunikacyjnego). W tym celu każde urządzenie niezależnie od pozostałych losuje liczbę 0 lub 1, przy czym prawdopodobieństwo wylosowania 1 wynosi p. Urządzenia, które wylosują 1, wysyłają żądanie dostępu. Dostęp do zasobu otrzyma to urządzenie, które w danej próbie jako jedyne wylosuje 1 (w przypadku braku lub kilku wysłanych żądań, dostęp nie jest przydzielany żadnemu urządzeniu).

(a) Wyznacz prawdopodobieństwo sukcesu, tj. zdarzenia, że w pojedynczej próbie pewne urządzenie uzyska dostęp do zasobu.

(b) Wyznacz taką wartość $p \in (0,1)$, dla której prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie jest jak największe. Ile wówczas wynosi to prawdopodobieństwo?

★ **Zadanie 9.** Nieskończenie wiele razy rzucamy niezależnie monetą, która daje orła z prawdopodobieństwem $p \in (0,1)$ i reszkę z prawdopodobieństwem $1-p$. Niech A oznacza zdarzenie, że ani razu nie wypadł orzeł. Korzystając z zadania 2 z listy 2 pokaż, że $P(A) = 0$.

★ **Zadanie 10.** Niech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Ustalmy zbiór $B \in \mathcal{S}$ taki, że $P(B) > 0$. Niech $P_B(A) = P(A \mid B)$, $A \in \mathcal{S}$.

(a) Pokaż, że $(\Omega, \mathcal{S}, P_B)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

(b) Wyznacz $P_B(\Omega)$, $P_B(B)$ oraz $P_B(B^C)$.

(c) Niech $\mathcal{S}_B = B \cap \mathcal{S}$.[1] Pokaż, że $(B, \mathcal{S}_B, P_B)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

[1] patrz zadanie 7 z listy 1