Rachunek Prawdopodobieństwa

LISTA 4

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2026 / 2027

Zadanie 1. Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X. Pokaż, że F jest prawostronnie ciągła, tj. dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lim\limits_{t \to a^+} F(t) = F(a)$.

Zadanie 2. W pewnej grze losowej gracz typuje 5 spośród 40 liczb, po czym losowane jest 5 liczb (każdy wynik losowania jest jednakowo prawdopodobny). Jeśli gracz trafnie wytypował 3 liczby, to wygrywa $100\,\$$, jeśli 4, to $1\,000\,\$$, a jeśli 5, to $100\,000\,\$$. Niech X oznacza wygraną gracza w pojedynczej grze. Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej X.

Zadanie 3. Niech X i Y oznaczają wyniki dwóch niezależnych rzutów sześcienną, symetryczną kostką do gry. Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej $U = X + Y$.

Zadanie 4. (*Indykatorowe zmienne losowe*) Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$.

(a) Dla $A \in \mathcal{S}$ zdefiniujmy

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \omega \in A \\ 0, & \text{jeśli } \omega \in \Omega \setminus A\,. \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja $\mathbb{1}_A$ jest zmienną losową i wyznacz jej dystrybuantę. Zmienną losową $\mathbb{1}_A$ nazywamy *indykatorową zmienną losową zdarzenia* A.

★ (b) Niech $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rozbiciem przestrzeni Ω na zdarzenia i niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Oznaczmy $X = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\, \mathbb{1}_{A_n}$. Uzasadnij, że X jest zmienną losową i wyznacz jej dystrybuantę.

Zadanie 5. Niech $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\Omega)$ oraz $P(A) = \lambda(A)/\pi$, gdzie $\lambda(A)$ oznacza powierzchnię (miarę Lebesgue'a) zbioru $A \in \mathcal{S}$. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ i niech $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową zdefiniowaną jako $X((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jaka jest interpretacja geometryczna zmiennej losowej X? Wyznacz dystrybuantę X i naszkicuj jej wykres.

Zadanie 6. Niech $F_1(t)$ będzie dystrybuantą zmiennej losowej X z zadania 5, a $F_2(t)$ dystrybuantą dyskretnej zmiennej losowej przyjmującej wartości 0 i $\frac{3}{2}$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ każda oraz wartość $\frac{1}{2}$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Przyjmijmy $F(t) = \frac{1}{3}F_1(t) + \frac{2}{3}F_2(t)$. Naszkicuj wykresy funkcji $F_1(t)$, $F_2(t)$ oraz $F(t)$. Czy $F(t)$ jest dystrybuantą pewnego rozkładu?

★ **Zadanie 7.** Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ i niech $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową. Dla $A \in \mathcal{B}$ niech $P_X(A) = (P \circ X^{-1})(A) = P(X \in A)$ (P_X nazywamy rozkładem zmiennej losowej X). Pokaż, że $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

★ **Zadanie 8.** Niech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Pokaż, że jeśli $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Omega)$, to wszystkie funkcje odwzorowujące Ω na pewien przeliczalny podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ są dyskretnymi zmiennymi losowymi.