Rachunek Prawdopodobieństwa

LISTA 5

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIT – 2026 / 2027

Zadanie 1. Rzucamy niezależnie cztery razy symetryczną monetą. Oznaczmy przez H liczbę wyrzuconych orłów, a przez T – liczbę reszek. Niech R oznacza liczbę różnych pierwiastków równania kwadratowego $x^2 - (H - T)x + H - T = 0$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej R.

Zadanie 2. Wybieramy losową liczbę z odcinka $[0, 1]$ zgodnie z rozkładem jednostajnym i podnosimy ją do kwadratu. Niech X oznacza wynik tej operacji. Wyznacz dystrybuantę i funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X oraz naszkicuj ich wykresy.

Zadanie 3. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym, której funkcja gęstości prawdopodobieństwa zadana jest wzorem $f(x) = \exp(-e^{-x} - x)$. Naszkicuj wykresy dystrybuanty i gęstości X.

Zadanie 4. Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $Y = |X|$.

Zadanie 5. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie ciągłym z dystrybuantą F_X podaną poniżej i niech $g(x) = \sqrt[3]{x}$ oraz $h(x) = e^{-x}$. Wyznacz funkcje gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty zmiennych losowych $Y = g(X)$ oraz $Z = h(X)$.

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ (t+1)/2, & t \in [-1, 1] \\ 1, & t > 1 \end{cases}.$$

Zadanie 6. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą i.i.d.[1] zmiennymi losowymi z dystrybuantą F. Niech $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(a) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej Y.

(b) Zakładając, że X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, są dyskretnymi zmiennymi losowymi z funkcją masy prawdopodobieństwa $P(X_i = k) = \dfrac{1}{N}$, $k \in \{1, \ldots, N\}$, wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa Y.

(c) Zakładając, że X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$, wyznacz funkcję gęstości prawdopodobieństwa Y.

Zadanie 7. Załóżmy, że dystrybuanta F zmiennej losowej X jest ciągła i ściśle monotoniczna. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $Z = F(X)$. Zinterpretuj uzyskany wynik.

[1] Skrót i.i.d. (ang. *independent and identically distributed*) oznacza niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie.

Zadanie 8. Rzucamy niezależnie dwoma sześciennymi, symetrycznymi kostkami. Niech X oznacza mniejszy, a Y większy z wyników rzutów (jeśli na obu kostkach wypadła taka sama liczba oczek k, przyjmujemy $X = Y = k$).

(a) Wyznacz rozkład łączy oraz rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y.

(b) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 9. Dystrybuanta łączna wektora losowego (X, Y) o rozkładzie ciągłym zadana jest wzorem

$$F_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} 1 - e^{-s} - e^{-t} + e^{-(s+t)} & \text{dla } s \geqslant 0 \wedge t \geqslant 0 \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}.$$

(a) Wyznacz gęstość łączną oraz gęstości brzegowe zmiennych losowych X i Y.

(b) Oblicz $P(X > Y)$.

(c) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.