Lista zadań nr 1
Funkcja - pojęcia wstępne, wykresy

1. Określić i narysować dziedziny naturalne funkcji:
   a) $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$; c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{x-1}$; d) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x-2}$.
2. Funkcja $f(x)$ jest określona na przedziale $[0,1]$. Jaka jest dziedzina funkcji:
   a) $g(x) = f(2x-1)$; b) $g(x) = f(x^2+1)$; c) $g(x) = f(\sqrt{x^2-x})$; d) $g(x) = f(x^2-1)$?
3. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Wyznaczyć $f(2x)$, $f(\frac{x}{2})$, $2f(x)$, $f(\frac{1}{x})$, $f(x^2)$, $(f(x))^2$.
4. Korzystając z definicji pokazać, że funkcja $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ jest malejąca na zbiorze $(1,\infty)$.
5. Korzystając z definicji zbadać różnowartościowość i nieparzystość funkcji $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Podać dziedzinę tej funkcji, miejsca zerowe, sporządzić jej wykres oraz na podstawie wykresu, określić zbiór wartości tej funkcji.
6. Zbadać parzystość i nieparzystość funkcji:
   a) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|+\sqrt{1+x^2}}$; c) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$.
7. Narysować wykresy funkcji:
   a) $f(x) = x-2+|x+2|$; b) $f(x) = ||2x+1|-2|$; c) $f(x) = |x-2|+|x+2|$;
   d) $f(x) = \sqrt{x^2+6x+9}$; e) $f(x) = 2x-\sqrt{x^2-6x+9}$; f) $f(x) = |2x-\sqrt{x^2-6x+9}|$.
8. Wykorzystując wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, sporządzić wykresy funkcji:
   a) $f(x)=2-\sqrt{x}$; b) $f(x)=2-\sqrt{|x|}$; c) $f(x)=|2-\sqrt{x}|$; d) $f(x)=2-\sqrt{x-1}$;
   e) $f(x)=2-\sqrt{1-x}$. Podać dziedziny tych funkcji.
9. Podać wzory funkcji złożonych $f\circ f$, $g\circ f$, $f\circ g$, $g\circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:
   a) $f(x) = x-1$, $g(x) = 3x+2$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2$;
   c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4$; d) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x+1}$.
10. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:
    a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; b) $f(x) = 3-\sqrt{4-x^2}$, $(-2 \le x \le 0)$; c) $f(x) = 3^{x+1}$;
    d) $f(x) = \log(x+3)$; e) $f(x) = -x^4, (x \le 0)$; f) $f(x) = x^2-4x$, $(x \le 2)$.