Lista zadań nr 3
Granica ciągu i granica funkcji

1. W nieskończonym ciągu geometrycznym suma trzech pierwszych wyrazów ciągu równa jest kwadratowi pierwszego wyrazu ciągu. Dla jakiej wartości ilorazu tego ciągu suma jego wszystkich wyrazów osiąga najmniejszą wartość? Obliczyć tę wartość.

2. Dla jakich wartości x spełniona jest nierówność
$$x + x(3-x^2) + x(3-x^2)^2 + \ldots < \frac{1}{x-1}?$$

3. Dla jakich wartości $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ liczba $\frac{3}{2}$ jest pierwiastkiem równania
$$x + x(3-x^2) + x(3-x^2)^2 + \ldots = 6\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha + 3\sin\alpha?$$

4. Znaleźć ciąg geometryczny, którego wyrazy spełniają warunki: $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$.

5. Zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągów:
a) $f_n = \sqrt[3]{n^3+2} - n$; b*) $b_n = 2^n - 3^n$; c) $d_n = \dfrac{1}{4^1+1} + \dfrac{1}{4^2+2} + \dfrac{1}{4^3+3} + \ldots + \dfrac{1}{4^n+n}$.

6. Ciąg (a_n) opisany jest wzorem $a_n = 5 + (n-1)(k-k^2)$, gdzie k jest parametrem. Wykazać, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Dla jakich wartości parametru k ciąg ten jest malejący?

7. Korzystając z definicji granicy ciągu uzasadnić podane równości:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-n}{n+4} = -1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n+5} = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2(n+3) = \infty$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\lfloor \dfrac{3n+1}{n+1} \right\rfloor = 2$. W pierwszych dwóch przykładach określić, dla jakich n wyrazy ciągu są odległe od granicy:
a) mniej niż $\frac{1}{10}$; b) więcej niż $\frac{1}{5}$?

8. Korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic oraz z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć podane granice:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{3n+2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+\sin n}{\sqrt{3n^3+2n^2}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \dfrac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \ldots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}} \right)$.

9. Korzystając z tabelki działań z symbolem ∞ obliczyć podane granice:
a) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$; b) $b_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^n$; c) $c_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+3+\ldots+(2n-1)}$.

10. Korzystając z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć podane granice:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n-1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{3^n-2}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n}$.

11. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym, uzasadnić zbieżność podanych ciągów:
a) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; b) $b_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$; c) $c_n = \dfrac{n^3}{10^n}$;
d) $d_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

12. Zbadać istnienie następujących granic:
a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{4-x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin x$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{\lfloor x \rfloor}}{2^x}$; d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|^3}{x^3-x^2}$.

13. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic obliczyć podane granice:
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{1-x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right)$.

14. Korzystając z twierdzenia o dwóch lub trzech funkcjach uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$; ; b) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$; ; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\sin x}{x^2} = 0$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\lfloor 3e^x \rfloor + 2}{\lfloor 2e^x \rfloor + 1} = \dfrac{3}{2}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^5 - \sin x) = \infty$; f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2x - \sin x} = \infty$.

15. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć lub uzasadnić podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$; c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(1+\cos x)}{x - \frac{\pi}{2}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2x - \sin x} = \infty$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x (2 + \cos x) = \infty$; g) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x (2 + \cos x) = 0$.

16. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne podanych funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; b) $g(x) = x - \arccos\frac{1}{x}$; c) $h(x) = 2x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$.

17. Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} q(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 1} q(x) = \infty$, funkcja q jest nieparzysta;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 5$;

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} r(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} [r(x) - x] = -1$, funkcja r jest parzysta.

Na rysunkach wskazać fragmenty wykresów spełniające poszczególne warunki.