Metody Probabilistyczne i Statystyka

LISTA 11 do wykładu o procesach stochastycznych

Informatyka algorytmiczna (I st.) WIiT – 2021/2022

Zadanie 1. (zadanie programistyczne) Rozważmy następujący proces Markova: w kasynie gracz startuje z 10 PLN w kieszeni. W chwili t obstawia zakład z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Jeśli obstawi to z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ wygrywa 1PLN i z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ przegrywa 1PLN. Jaki jest stan portfela gracza po 3, 4, 5 krokach (tj. obliczyć odpowiednie rozkłady prawdopodobieństwa)? Jaki obliczyć prawdopodobieństwo stanów po bardzo dużej liczbie kroków? Stan gracza 0PLN jest stanem pochłaniającym.
W oparciu o odpowiedzi napisz prosty kod zwracający rozkład prawdopodobieństwa stanów po zadanej liczbie kroków.

Zadanie 2. Rozważamy tzw. ruchy pijaka. Pijak porusza się po punktach 1,2, …, 10. Jeśli znajdzie się w punkcie x, to wybiera kierunek ruchu z jednostajnym prawdopodobieństwem: z ppb $\frac{1}{3}$ przechodzi w stan $x+1$, z ppb $\frac{1}{3}$ przechodzi w stan $x-1$ i z ppb $\frac{1}{3}$ pozostaje w miejscu. Dla $x = 1$ z ppb $\frac{2}{3}$ pozostaje w stanie 1 a z ppb $\frac{1}{3}$ przechodzi do stanu 2. Podobnie, dla $x = 10$ pozostaje w stanie 10 z ppb $\frac{2}{3}$ i przechodzi do stanu 9 z ppb $\frac{1}{3}$.
Czy dla tego procesu istnieje rozkład stacjonarny? Jeśli jest to jaki? Co zmieniłoby się, gdyby pijak mógł wybrać tylko ruch $x \to x-1, x+1$ z pominięciem $x \to x$, z wyjątkiem $x = 1, 10$, gdzie 1 przechodzi na 1 lub 2 (oba z ppb $\frac{1}{2}$) oraz 10 przechodzi na 9 lub 10 (oba z ppb $\frac{1}{2}$).

Zadanie 3. Napisać algorytm zwracający losowy matching (skojarzenie) w zadanym grafie (tzn. chodzi o podgraf, gdzie każdy wierzchołek ma stopień 0 lub 1). Wybór ma być z jednostajnym prawdopodobieństwem ze zbioru wszystkich matchingów. Niestety nic nie wiemy z wyprzedzeniem o grafie, dla którego ma to działać.

Zadanie 4. Przerwy w dostawie energii elektrycznej są niespodziewanymi, rzadkimi zdarzeniami występującymi zgodnie z procesem Poissona o średniej częstości 4 wyłączeń na miesiąc. Obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż 5 w ciągu trzech miesięcy.

Zadanie 5. Rozważmy rzadkie zdarzenia wystepujące z częstością 1 na 1 minutę. Taki proces można modelować za pomocą procesu Poissona lub w sposób dyskretny – jako *binomial counting process*. Porównaj wariancję tego procesu dla różnych opcji:

1. dla procesu Poissona
2. dla *binomial counting process* dla różnych wartości parametru Δ – długości okresu, w którym może wystąpić zdarzenie.

Wytłumacz różnice. Którą z wartości powinnno się brać w wypadku

- modelowania ruchu pojazdów,
- przychodzenia zapytań do serwera WWW?