Algorytmika 2024/2025
Lista ćwiczeń

Ćw 1 — Pokaż, że następujący problem jest nierozstrzygalny:

> *Mamy dwa programy P i Q obliczające funkcje z liczb naturalnych w liczby naturalne. Czy dla każdego naturalnego n zachodzi $P(n) = Q(n)$?*

Wskazówka: Zredukuj problem $(\forall n)(P(n) = 0)$ do powyższego problemu.

Ćw 2 — Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}^k$ nazywamy rekurencyjnie przeliczalnym (RE), jeśli istnieje całkowita funkcja obliczalna $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ taka, że

$$A = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Pokaż, że jeśli dla $A \subseteq \mathbb{N}$ mamy $A \in RE$ oraz $\mathbb{N}\setminus A \in RE$, to A jest zbiorem rekurencyjnym.
2. Pokaż, że jeśli A jest rekurencyjny, to A jest rekurencyjnie przeliczalny.
3. Uzasadnij tezę $STOP \in RE$.

Ćw 3 — Dla ciągów $x, y \in \Sigma^*$ określamy:

$$x \sqsubseteq y \iff (\exists z \in \Sigma^*)(y = xz), \quad x \sqsupseteq y \iff (\exists z \in \Sigma^*)(y = zx).$$

1. Pokaż, że $\sqsubseteq$ jest częściowym porządkiem na Σ^*.
2. Wyraź relację $\sqsupseteq$ za pomocą relacji $\sqsubseteq$ oraz funkcji `reverse` odwracania ciągów.

Ćw 4 — Ustalmy skończony alfabet Σ oraz wzorzec $P[1..m] \in \Sigma^*$. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo tego, że losowy ciąg długości n elementów Σ jest zgodny (w jakimś miejscu) ze wzorcem P. Pokaż, że

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

Ćw 5 — Ustalmy skończony alfabet Σ. Ustalmy ciąg $A[1..k]$. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo tego, że losowy ciąg X długości n elementów z Σ zawiera podciąg A, czyli, że istnieją $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$ takie, że $X[j_i] = A[j]$ dla wszystkich $j = 1, \ldots, k$.

1. Wyznacz dokładny wzór na p_n.
2. Wyznacz asymptotykę ciągu $(p_n)_n$.

Ćw 6 — Załóżmy, że wzorzec P składa się z różnych znaków. Pokaż, że problem dopasowania wzorca P do ciągu długości n można rozwiązać w czasie $O(n)$ (niezależnym od długości wzorca).

Ćw 7 — Ustalmy skończony alfabet Σ. Niech $\mathrm{lcs}(x, y)$ oznacza długość najdłuższego wspólnego podciągu ciągów $x, y \in \Sigma^*$.

1) Niech $\mathrm{scs}(x, y)$ oznacza długość najkrótszego ciągu, którego podciągami są $x, y \in \Sigma^*$. Pokaż, że
$$\mathrm{scs}(x, y) = |x| + |y| - \mathrm{lcs}(x, y).$$
2) Niech $d(x, y)$ oznacza odległość edycyjną między ciągami $x, y \in \Sigma^*$, dla dopuszczalnych operacji dodawania oraz usuwania pojedynczego znaku (obie operacje mają wagę 1). Pokaż, że
$$d(x, y) = |x| + |y| - 2 \cdot \mathrm{lcs}(x, y).$$

Ćw 8 — Załóżmy, że $(a_n)_{n\geq 0}$ jest ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych takich, że

$$(\forall n, m \in \mathbb{N})(a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m).$$

Pokaż, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}$.

Ćw 9 — Ścieżką w siatce $\mathbb{Z}^2$ długości n nazywamy skończony ciąg punktów $(P_k)_{k=0}^n$ zbioru $\mathbb{Z}^2$ taki, że $P_{i+1} \in \{P_i + (\pm 1, 0), P_i + (0, \pm 1)\}$. Niech L_n oznacza liczbę nieprzecinających się ścieżek w $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zaczynających się w punkcie $(0, 0)$ długości n.

1) Pokaż, że istnieje granica $\gamma_2 = \lim_{n\to\infty}(L_n)^{1/n}$.
2) Znajdź jakieś rozsądne ograniczenia na liczbę γ.

Ćw 10 — Załóżmy, że częściowy porządek $(X, \preceq)$ ma następującą własność: dla dowolnego nieskończonego ciągu $(a_n)_n$ elementów X istnieją $i < j$ takie, że $a_i \preceq a_j$. Pokaż, że wtedy dla dowolnego nieskończonego ciągu $(a_n)_n$ elementów X istnieje nieskończony podciąg $(a_{n_i})_i$ taki, że $a_{n_i} \preceq a_{n_j}$, gdy $i < j$.

Wskazówka - skorzystaj z twierdzenia Ramseya: dla dowolnej funkcji $F : [\mathbb{N}]^2 \to \{0, 1\}$ istnieje nieskończony zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $|F[[A]^2]| = 1$.

Ćw 11 — Załóżmy, że $\preceq$ jest dobrym porządkiem zbioru Σ. Ustalmy liczbę $n \in \mathbb{N}$. Pokaż, że porządek leksykograficzny $\preceq_{\text{lex}}$ obcięty do zbioru

$$\Sigma^{\leq n} = \{\sigma \in \Sigma^* : |\sigma| \leq n\}$$

jest dobrym porządkiem.

cdn.