

# Statystyka i analiza danych 2025/2026

## Lista ćwiczeń

Używam następujących skrótów:

1. ISL = [An Introduction to Statistical Learning](#) autorstwa G. Jamesa i in.
2. ESL = [The Elements of Statistical Learning](#) autorstwa T. Hastie i in.
3. PAC = [Probability and computing](#) autorstwa M. Mitzenmacher i in.
4. ...

### Lista 0 (rozgrzewka: kontynuacja Rachunku Prawdopodobieństwa)

**Ćwiczenie 1** — Załóżmy, że zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne. Udowodnij, że

- (a)  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ ,
- (b)  $\mathbb{V}\text{ar}(X + Y) = \mathbb{V}\text{ar}(X) + \mathbb{V}\text{ar}(Y)$ .

Czy warunek o niezależności jest niezbędny?

**Ćwiczenie 2** — Rozważmy łańcuch Markowa o  $n$  stanach opisany za pomocą macierzy przejścia  $P$ . Niech  $P^{(m)}$  opisuje macierz przejścia tego łańcucha w  $m$  krokach. Pokaż, że  $P^{(m)} = P^m$ .

**Ćwiczenie 3** — Pokaż, że relacja „komunikowania się” na zbiorze stanów łańcucha Markowa jest relacją równoważności. Wyjaśnij następnie, jak interpretować jej klasy równoważności (klasy komunikacji) w kontekście struktury oraz zachowania łańcucha Markowa.

**Ćwiczenie 4** — Rozważmy łańcuch Markowa o stanach  $\{1, 2, 3\}$  opisany macierzą przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Czy łańcuch jest nieredukowalny? Czy jest nieokresowy? Uzasadnij.
- b) Wyznacz rozkład stacjonarny łańcucha oraz macierz  $M = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ .

**Ćwiczenie 5** — Rozważmy łańcuch Markowa o stanach  $\{1, 2, 3\}$  opisany macierzą przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdź ile rozkładów stacjonarnych istnieje dla tego łańcucha oraz wyznacz macierz  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ . Jakiej własności nie ma macierz  $K$ , którą miała macierz  $M$  z poprzedniego zadania?

**Ćwiczenie 6** —  $N$  ponumerowanych molekuła gazu przemieszcza się losowo między dwoma zamkniętymi pojemnikami przez mały otwór. Ruch molekuł można zamodelować następująco: w każdym kroku losujemy jednostajnie jedną z molekuł i przenosimy do innego pojemnika, niż ten w którym aktualnie się znajduje. Rozważmy łańcuch Markowa, o zbiorze stanów  $S = \{0, 1, \dots, N\}$  reprezentującym liczbę molekuł w pierwszym pojemniku.

- a) Dla powyższego łańcucha wyznacz prawdopodobieństwa przejścia oraz rozkład stacjonarny.
- b) Niech  $N = 100$ . Uruchamiamy proces z pierwszym pojemnikiem pustym. Jeśli zmiana stanu następuje raz na jedną nanosekundę, średnio jak długo trzeba poczekać zanim pojemnik znów będzie pusty?

Wskazówka: zobacz Twierdzenie 7.7 na stronie 168 w książce PAC (link na początku listy).

cdn.

J.L.