Teoria Grup.

Def. Parę $(G, \cdot)$ nazywamy grupą gdy
G – zbiór
$\cdot$ – działanie na G
takie że 1. $\cdot$ łączne na G
2. Istnieje element neutralny $\cdot$
3. Każdy element posiada odwrotny

Przykład $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(S_n, \circ)$, $(\mathbb{Z}_n, \overset{+}{n})$

TW Cayley
Niech $(G, \circ)$ grupa skończona $|G| < \infty$.
Istnieje $n \in \mathbb{N}$, $G \leq S_n$

D-d Lista zadań
Szkic dowodu.
$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$

Element $g \in G$ przestawia elementy G:

$$\{g \cdot g_1, g \cdot g_2, \dots g \cdot g_n\} = \{g_{i_1}\ g_{i_2}\ \dots\ g_{i_n}\}$$

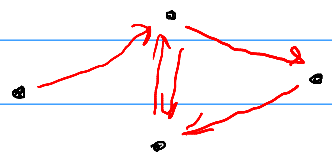
Więc elementowi g odpowiada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$

To przyporządkowanie jest różnowartościowe
$G \longrightarrow S_n$

$\square$

• Graf Cayleya Grupy

Graf skierowany: Zbiór wierzchołków oraz strzałek między nimi



Formalnie: $\Gamma = (V, E)$ $\quad V$ - zbiór

$E \subseteq V \times V \ni (v_1, v_2)$ interp $(\bullet v_1 \longrightarrow \bullet v_2$

Def Niech $(G, \cdot)$ grupa $A \subseteq G$.

Grafem Cayleya grupy G względem A nazywamy graf skierowany

$$\Gamma = (G, E)$$

gdzie

$$E \subseteq G \times G : \big[(g,h) \in E \big] \Longleftrightarrow \big[\exists a \in A \ \ h = a \cdot g \big]$$

$$(g,h) \in E \text{ to } g \longrightarrow h$$

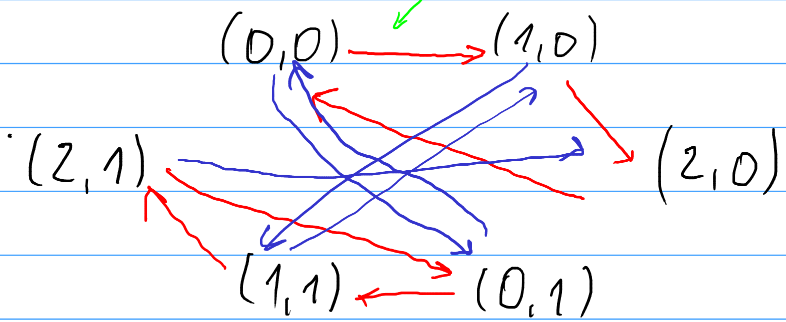
$$g \longrightarrow a \cdot g$$

Przykład. $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 = \{ (a,b) : a \in \mathbb{Z}_3, \ b \in \mathbb{Z}_2 \}$

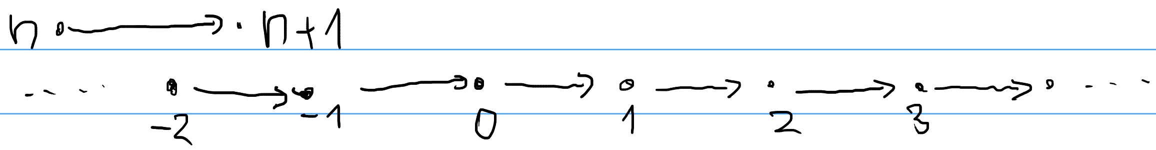
$= \{ (a,b) : a \in \{0,1,2\}, \ b \in \{0,1\} \}$

$A = \{ (1,0), (0,1) \}$

bo $(1,0) + (0,0) = (1,0)$



Przykład. Graf $G = (\mathbb{Z}, +)$, $A = \{1\}$



Warstwy grupy względem podgrupy.

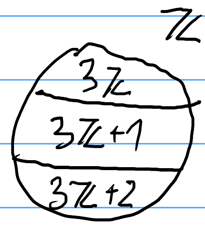
Definicja. Niech $(G, \cdot)$ grupa, $A \subseteq G$.
Wtedy A nazywamy podgrupą, gdy:

1. $\forall a, b \in A \quad a \cdot b \in A$.
2. $\forall a \in A \quad a^{-1} \in A$

Przykład. $(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$
$A = 3\mathbb{Z} = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$
$3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.

Warstwy $\mathbb{Z}$ wzgl $3\mathbb{Z}$ to podzbiory:

- $3\mathbb{Z}$
- $3\mathbb{Z}+1 = \{3n+1 : n \in \mathbb{Z}\}$
- $3\mathbb{Z}+2 = \{3n+2 : n \in \mathbb{Z}\}$



Def Niech $(G, \cdot)$ grupa $H \leq G$.
Na zbiorze G definiujemy relację $\sim$.
$g \sim f \iff g^{-1} \cdot f \in H$

Fakt $\sim$ jest relacją równoważności na G.
D-d

1. Zwrotność. Dla dowolnego $g \in G$ mamy:

$g^{-1} \cdot g = e \in H$. Więc $g \sim g$

2. Symetryczność. Niech $f, g \in G$ takie że $g \sim f$. To znaczy że $g^{-1} \cdot f \in H$
ale wtedy $f^{-1} \cdot g = (g^{-1} \cdot f)^{-1} \in H$
tzn: $f \sim g$

3. Przechodniość: Niech $f, g, h \in G$ takie, że
$f \sim g \wedge g \sim h$ tzn:
$f^{-1} \cdot g \in H$ $g^{-1} \cdot h \in H$

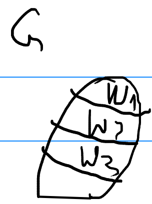
H jest zamknięte. więc $(f^{-1} \cdot g)(g^{-1} h) \in H$
$f^{-1} \cdot h \in H$
tzn $f \sim h$

(1) + (2) + (3) : $\sim$ jest relacją równoważności. □

Wniosek Relacja $\sim$ dzieli zbiór G na klasy abstrakcji

Definicja. Niech $(G, \cdot)$ grupa, $H \leq G$.
$g \in G$, warstwą lewostronną g względem H nazywamy klasę abstrakcji do której należy: $[g]_\sim$

Oznaczenie: $gH = [g]_\sim$.



Uwagi:

1. Dwie warstwy są albo równe albo rozłączne
2. Każdy element należy do pewnej warstwy

Fakt. Niech $(G, \cdot)$ grupa H podgrupa G, $g \in G$.
Warstwa g jest postaci

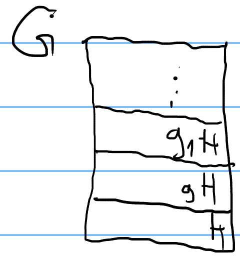
$$gH = \{ g \cdot h : h \in H \}$$

D-d: Niech $a \in gH \iff a \sim g \iff g \sim a$

$$\iff g^{-1} \cdot a \in H \iff \exists h \in H \;\; g^{-1} a = h$$

$$\iff \exists h \in H \;\; a = gh \iff a \in \{ g \cdot h : h \in H \}$$

$\square$



Przykład:
$G = (\mathbb{Z}, +)$ $\quad$ $H = 4\mathbb{Z}$.

Warstwy: $0 + 4\mathbb{Z} = \{ 0 + h : h \in 4\mathbb{Z} \} = 4\mathbb{Z}$
$1 + 4\mathbb{Z} = \{ 1 + h : h \in 4\mathbb{Z} \} = \{ 4n + 1 : n \in \mathbb{Z} \}$
$2 + 4\mathbb{Z} =$
$3 + 4\mathbb{Z} =$
$4 + 4\mathbb{Z} = \{ 4 + h : h \in 4\mathbb{Z} \} = 4\mathbb{Z}$.

Fakt. Niech $(G, \cdot)$ grupa, $H \leq G$.
Niech W - warstwa G wzgl H.
Wtedy $|W| = |H|$

D-d Niech $W = a \cdot H = \{ a \cdot h : h \in H \}$

Niech $\varphi: H \to W$, $\varphi(h) = a \cdot h$

φ jest bijekcją.

Więc H i W są równoliczne $|H| = |W|$. $\square$

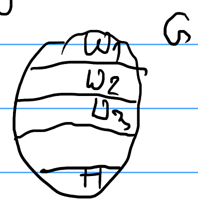
TW. Lagrange'a.

Niech $(G, \cdot)$ grupa skończona $H \leq G$.

Wtedy

$$|H| \mid |G|$$

D-d. Niech $W_1 W_2 \ldots W_n$ wszystkie warstwy G względem H



$$G = W_1 \,\dot\cup\, W_2 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, W_n$$

W_i W_j rozłączne:

$$|G| = |W_1| + |W_2| + \ldots + |W_n|$$

F: $|W_i| = |H|$

$$|G| = \underbrace{|H| + |H| + \ldots + |H|}_{n\times} = |H| \cdot n$$

Więc $|G| \div |H| = n$

$$|H| \mid |G|$$

$\square$