Grupy:

C_n : $n \in \mathbb{N}^+$
S_n : $n \in \mathbb{N}$.

- Niech X zbiór. Wtedy $(\{f: X \to X : f \text{ bijekcja}\}, \circ)$
- Niech X zbiór $A \subseteq X$:

$\forall_{a \in A}\ f(a) \in A$

$(\{f: X \to X : f \text{ bijekcja} \wedge \forall_{a \in A}\ f(a) = a\}, \circ)$

- Grupy automorfizmów.

- automorfizmy grup:

Niech $(G, \cdot)$ grupa.

$(\{\varphi: G \to G \text{ izomorfizm}\}, \circ) = \mathrm{Aut}(G)$ - grupa automorf.

- automorf grafu. $\Gamma = (V, E)$ $E \subseteq V \times V$

$(\{f: V \to V : f \text{ bijekcja},\ \forall_{v,w \in V}\ (v,w) \in E \Leftrightarrow (f(v), f(w)) \in E\}, \circ)$

- Podgrupa. Niech $(G, *)$ grupa. $A \subseteq G$ nazywamy podgrupą gdy
  1. $\forall_{a,b \in A}\ a \cdot b \in A$
  2. $\forall_{a \in A}\ a^{-1} \in A$.

Wtedy $(A, *)$ jest grupą

• Produkt grup. Niech $(G,\cdot)$, $(H,*)$ grupy.

Na $G\times H$ definiujemy działanie:

$$(g_1,h_1)\circ(g_2,h_2) = (g_1\cdot g_2,\ h_1 * h_2)$$

Wtedy $(G\times H, \circ)$ jest grupą.

• Podgrupy normalne, dzielniki normalne.

Def. Niech $(G,\cdot)$ grupa, $H\subseteq G$.
Zbiór H nazywamy podgrupą normalną, gdy

1. $H \leq G$ $\qquad\qquad H \trianglelefteq G$
2. $\forall h\in H,\ g\in G \quad g^{-1}\cdot h\cdot g \in H$

Przykłady. • Jeśli G jest abelowa, $H\leq G$ to $H \triangleleft G$

• Niech $(G,\cdot)$ grupa, wtedy centrum grupy

$$Z(G)=\{g\in G : \forall h\in G \quad hg=gh\} \triangleleft G.$$

• Podgrupa $\{id, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\} \leq S_3$ nie jest podgrupą normalną

Def. Grupę G nazywamy prostą gdy

$$\forall H \quad H\triangleleft G \Rightarrow H=\{e\} \lor H=G.$$

Uwaga Niech $H \le G$. Nast. warunki są równoważne:

1. $H \trianglelefteq G$
2. $\forall a \in G \quad aH = Ha$
3. $\forall a \in G \quad a^{-1}Ha = H$

• Grupa ilorazowa.

Niech $(G, \cdot)$ grupa, $H \triangleleft G$.

Na zbiorze lewych warstw $G/H = \{aH : a \in G\}$ definiujemy działanie $\cdot$ następująco:

$$aH \cdot bH = a \cdot b H$$

Fakt. $\forall a, a', b, b' \in G$ jeśli $aH = a'H$ i $bH = b'H$ to $a \cdot bH = a' \cdot b'H$.

D-d

Przyp: $aH = a'H \iff a^{-1} \cdot a' \in H$. $\quad \begin{cases} aH = a'H \\ a^{-1} \cdot a' \in H \end{cases}$

Wystarczy pokazać

$$\underbrace{abH = a'bH}_{*} = a'b'H$$

$*$ Zachodzi bo: $(ab)^{-1} \cdot a'b = b^{-1}(\underbrace{a^{-1} \cdot a'}_{\in H \triangleleft G}) \cdot b \overset{H \triangleleft G}{\in} H$ $\square$

Tw. Niech $(G, \cdot)$ grupa $H \triangleleft G$. Wtedy $(G/H, \cdot)$ jest grupą.

• G/H nazywamy grupą ilorazową.

D-d. (0) $\circ$ jest działaniem w G/H

bo $aH \circ bH = abH \in G/H$.

(1.) Łączność:

Niech $a, b, c \in G$. Wtedy

Dział. w G jest łączne:

$$(aH \cdot bH) \cdot cH = a \cdot b H \cdot cH = (a \cdot b) \cdot c\, H =$$

$$a \cdot (b \cdot c) H = aH \cdot (bH \cdot cH)$$

(2) Element neutralny to $H = eH$: $e \in G$.

$$eH \cdot aH = e \cdot a \cdot H = a \cdot H$$

(3) Element odwrotny do aH to $a^{-1}H$:

$$aH \cdot a^{-1}H = a \cdot a^{-1} H = eH \qquad \square$$

Przykłady:

$G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 3\mathbb{Z} = \{3n,\ n \in \mathbb{Z}\} \triangleleft \mathbb{Z}$.

Grupa $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

Warstwy $\{0 + 3\mathbb{Z},$
$1 + 3\mathbb{Z},$
$2 + 3\mathbb{Z}\}$

Działanie $(1+3\mathbb{Z}) + (1+3\mathbb{Z}) = (1+1) + 3\mathbb{Z} = 2 + 3\mathbb{Z}$

$(1+3\mathbb{Z}) + (2+3\mathbb{Z}) = 3 + 3\mathbb{Z} = 0 + 3\mathbb{Z}$.

$(a+3\mathbb{Z}) + (b+3\mathbb{Z}) = (a \underset{3}{+} b) + 3\mathbb{Z}$.

- Homomorfizmy grup.

Def. Niech $(G, \cdot)$, $(H, *)$ grupy. Funkcja

1. $\varphi: G \to H$ nazywamy homomorf. gdy $\forall_{a,b \in G}$ $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.

2. $\varphi: G \to H$ nazywamy izomorf gdy φ jest homomorf i φ jest bijekcją.

Przykład $\varphi(r) = 2^r : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ homomorf.

Def. Niech $\varphi: G \to H$ homomorfizm

1. Jądro homomorfizmu nazywamy:

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = e_H\}$$

2. Obraz φ nazywamy:

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{h \in H : \exists_{g \in G}\ \varphi(g) = h\}.$$

Przykład. Oś OY.

Niech $\varphi(x,y) = x : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}, +)$. Wtedy

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) = x = 0\} = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$$

Fakt. Niech $\varphi: G \to H$ homomorfizm. Wtedy

1. $\mathrm{Ker}\,\varphi \lhd G$
2. $\mathrm{Im}\,\varphi \leq H$

D-d (1):

I. $\operatorname{Ker}\varphi \leq G$:

Niech $a, b \in \operatorname{Ker}\varphi$ tzn

$$\varphi(a) = \varphi(b) = e_H$$

Wtedy

- $\varphi(a\cdot b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b) = e_H\cdot e_H = e_H$.

  Więc $a\cdot b \in \operatorname{Ker}\varphi$

- $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = e_H^{-1} = e_H$

  Więc $a^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$

II Niech $h \in \operatorname{Ker}\varphi$, $g \in G$. Cel $g^{-1} h g \in \operatorname{Ker}\varphi$.

$$\varphi(g^{-1}\cdot h\cdot g) = \varphi(g)^{-1}\cdot\underbrace{\varphi(h)}\cdot\varphi(g) =$$

$$\varphi(g)^{-1}\cdot e_H\cdot\varphi(g) = e_H$$

Więc $g^{-1}\cdot h\cdot g \in \operatorname{Ker}\varphi$, więc $\operatorname{Ker}\varphi \trianglelefteq G$ $\square$

Tw. Tw o homomorfizmie.

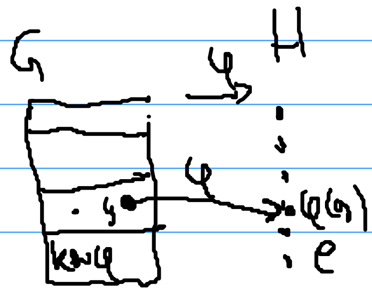
Niech $\varphi: G \to H$ homomorfizm na.

Wtedy $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong H$.

D-d. Rozważmy funkcję

$$F: G/\operatorname{Ker}\varphi \to H$$

$$F(g\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(g)$$



1. Wartości funkcji F nie zależy od wyboru reprezentanta warstwy, tzn. jeśli

$$g\ker\varphi = g'\ker\varphi \Rightarrow F(g\ker\varphi) = F(g'\ker\varphi).$$

bo Niech $g\ker\varphi = g'\ker\varphi$

tzn $g^{-1}\cdot g' \in \ker\varphi$

wtedy $F(g'\ker\varphi) = \varphi(g') = \varphi(g\cdot g^{-1}\cdot g') =$

$$\varphi(g)\cdot \varphi(\underbrace{g^{-1}\cdot g'}_{\in \ker\varphi}) = \varphi(g)\cdot e_H = \varphi(g) = F(g\ker\varphi)$$

F jest izomorfizmem:

- F jest homomorfizmem

$$F(g\ker\varphi \cdot h\ker f) = F(g\cdot h\ker\varphi) =$$

$$\varphi(g\cdot h) \overset{\varphi \text{ hom}}{=} \varphi(g)\cdot\varphi(h) =$$

$$F(g\ker\varphi)\cdot F(h\ker\varphi).$$

- F jest 1-1 :

Niech $F(g\ker\varphi) = F(h\ker\varphi)$

tzn

$$\varphi(g) = \varphi(h)$$

$$\varphi(g)\cdot\varphi(h)^{-1} = e_H$$
$$\varphi(g\cdot h^{-1}) = e_H$$

tzn $g\cdot h^{-1} \in \ker\varphi$.

Więc $g\ker\varphi = h\ker\varphi$

- F jest na. (bo φ jest na) $\square$

Przykład:
$G=(\mathbb{Z},+)$ $H=C_n$

Wiemy $\varphi_n(k)=k \pmod n : \mathbb{Z}\to C_n$ homomorfizm.

$\ker\varphi_n = n\mathbb{Z}$

Tw: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong C_n$.

Dla $n=3$ $\{0+3\mathbb{Z},\ 1+3\mathbb{Z},\ 2+3\mathbb{Z}\}$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\{0 \quad 1 \quad 2\}$$

Uwaga Niech $(G,\cdot)$, $g\in G$. Wtedy funkcja
$$f_g(x)=g^{-1}xg : G\to G$$
jest automorfizmem grupy G.

D-d cd $f_g(x\cdot y) = g^{-1}\cdot xyg =$