Ideały, pierścień ilorazowy

- $I \subseteq P$ jest ideałem gdy
  $\forall a,b \in I,\ r \in P \quad a+b,\ -a,\ a\cdot r,\ r\cdot a \in I$

Np: $3\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$

- Niech P – pierścień, $I \triangleleft P$. Definiujemy pierścień ilorazowy

$$P/I = \{a+I : a \in P\}$$

$$(a+I) \dot{+} (b+I) = (a \overset{\cdot}{+} b) + I$$

Np: $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0+3\mathbb{Z},\ 1+3\mathbb{Z},\ 2+3\mathbb{Z},\ \cancel{3+3\mathbb{Z}}\}$

$$(a+3\mathbb{Z}) \dot{+} (b+3\mathbb{Z}) = (a \dot{+} b) + 3\mathbb{Z} = (a \overset{\cdot}{\underset{3}{+}} b) + 3\mathbb{Z}$$

- Def Niech $(P, +, \cdot)$, $(R, +, \cdot)$ pierścienie.
  Funkcję $\varphi : P \to R$ nazywamy homomorfizmem:

  1. $\forall a,b \in P \quad \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
  2. $\forall a,b \in P \quad \varphi(a\cdot b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$.

Np: $\varphi(k) = k \pmod 3 : \mathbb{Z} \to \{0,1,2\}$

homomorf pierścieni $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ i $\mathbb{Z}_3$.

Uwaga. Niech $\varphi : P \to R$ homomorfizm.
Wtedy
- $\forall a \in P \quad \varphi(-a) = -\varphi(a)$
- $\varphi(0_P) = 0_R$

o ile ist. $\begin{cases} \cdot\ \varphi(1_P) = 1_R \\ \cdot\ \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} \end{cases}$

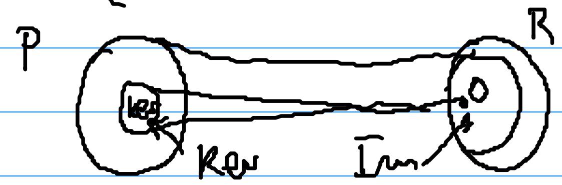
Def. Niech $\varphi : P \to R$ homomorfizm

1. Jądrem φ nazywamy zbiór:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{a \in P : \varphi(a) = 0_R\}$$

2. Obrazem φ nazywamy:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{b \in R : \exists a \in P : \varphi(a) = b\} = \varphi[P]$$



Przykład $\varphi(k) = k \pmod 3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$

$$\ker\varphi = \{a \in \mathbb{Z} \ \ \varphi(a) = 0\} = 3\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{Z}_3$$

Fakt. Niech $\varphi : P \to R$ homomorfizm. Wtedy

1. $\operatorname{Ker}\varphi \lhd P$. ideał
2. $\operatorname{Im}\varphi \leq R$ podpierścień.

D-d.

1. Niech $a, b \in \operatorname{Ker}\varphi$, $r \in P$.

(Cel: $a+b, -a, r \cdot a, a \cdot r \in \operatorname{Ker}\varphi$).

- $a+b \in \operatorname{Ker}\varphi$:

$a, b \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ to $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Więc $\varphi(a+b) \overset{\text{hom}}{=} \varphi(a) + \varphi(b) = 0 + 0 = 0$.

więc $(a+b) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

- $r \cdot a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$:

Niech $a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ tzn; $\varphi(a) = 0$.

$\varphi(r \cdot a) = \varphi(r) \cdot \varphi(a) = \varphi(r) \cdot 0 = 0$

więc $r \cdot a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

$a r \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ ana. $\square$

TW. Twierdzenie o homomorfizmie pierścieni

Niech $\varphi : P \to R$ homomorfizm. Wtedy.

$$P/_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \cong \mathrm{Im}\,\varphi.$$

D-d. Pokażemy, że funkcja:

$$F(a + \mathrm{Ker}\,\varphi) = \varphi(a) : P/_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \to \mathrm{Im}\,\varphi$$

jest izomorfizmem pierścieni.

tzn: F jest homomorf. i bijekcją.

- homomorfizm:

$F((a + \mathrm{Ker}\,\varphi) \dot{+} (b + \mathrm{Ker}\,\varphi)) = F((a \dot{+} b) + \mathrm{Ker}\,\varphi) =$

$\varphi(a \dot{+} b) = \underline{\varphi(a)} \dot{+} \varphi(b) = \underline{F(a + \mathrm{Ker}\,\varphi)} \dot{+} F(b + \mathrm{Ker}\,\varphi)$

• 1-1

Niech $F(a+\mathrm{Ker}\varphi) = F(b+\mathrm{Ker}\varphi)$

to $\varphi(a) = \varphi(b)$

$\varphi(a) - \varphi(b) = 0$

$\varphi(a-b) = 0$

to $a-b \in \mathrm{Ker}\varphi.$

Wtedy: $a+\mathrm{Ker}\varphi = b+\mathrm{Ker}\varphi$ (w $P/\mathrm{Ker}\varphi$)

• na : cw $\square$

Uwaga. Jeśli $\varphi : P \to R$ homomorfizm "na" to

$$P/\mathrm{Ker}\varphi \cong R.$$

Przykład $\varphi(k) = k \pmod 3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3.$

$\cdot \mathrm{Ker}\varphi = 3\mathbb{Z}.$

$$P/\mathrm{Ker}\varphi = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$$

$$\{0+3\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}\ 2+3\mathbb{Z}\} \cong \{0,1,2\}$$

• CIAŁA.

Def Pierścień $(P,+,\cdot)$ nazywamy ciałem, gdy jest przemienny, posiada 1 oraz

$$(\forall a \in P)\ [a \neq 0 \to (\exists b \in P\quad a \cdot b = 1)]$$

Np. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p : p \in \mathbb{P}.$

Fakt. Pierścień P przemienny z 1 jest ciałem $\Leftrightarrow$

P ma tylko dwa ideały: $P \triangleleft P$, $\{0\} \triangleleft P$.

D-d: zadanie z listy.

Def. Niech P pierścień, $I \triangleleft P$ nazywamy ideałem maksymalnym, gdy

1. $I \neq P$.
2. $\forall J \quad J \supset I \wedge J \triangleleft P \rightarrow J = P$

Przykład. $P = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$

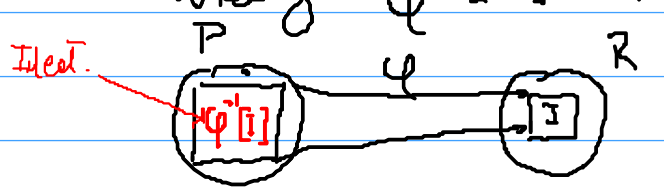
Ideały $\quad n\mathbb{Z} \quad : n \in \mathbb{N}^+$

Ideały maksymal. $\quad p\mathbb{Z} : p \in \mathbb{P}$.

Lemat. Niech $\varphi : P \to R$ homomorfizm.

Niech $I \triangleleft R$

Wtedy $\varphi^{-1}[I] \triangleleft P$.



D-d. Niech $a, b \in \varphi^{-1}[I]$, $r \in P$

(Cel: $a+b$, $-a$, $r \cdot a$, $a r \in \varphi^{-1}[I]$.)

- $a+b \in \varphi^{-1}[I]$. :

$a, b \in \varphi^{-1}[I]$ tzn $\varphi(a), \varphi(b) \in I$

$\varphi(a) + \varphi(b) \in I$

$\varphi(a+b) \in I$

Więc : $a+b \in \varphi^{-1}[I]$.

- $r \cdot a \in \varphi^{-1}[I]$:

$a \in \varphi^{-1}[I]$ tzn $\varphi(a) \in I$

Wtedy

$\varphi(r \cdot a) = \varphi(r) \cdot \varphi(a) \in I$

Więc $r \cdot a \in \varphi^{-1}[I]$ $\square$

Tw. Niech $(P, +, 1, \cdot)$ pierścień przemienny z 1.
Niech $I \triangleleft P$ ideał maksymalny.

Wtedy P/I jest ciałem.

D-d.

- Skoro P jest przemienny z 1 to P/I jest także przemienny z 1:

$(a+I) \cdot (b+I) = a \cdot b + I \overset{\text{Przem}}{=} b \cdot a + I = (b+I) \cdot (a+I)$

$(1+I)(a+I) = 1 \cdot a + I = a + I$

- Pierścień P/I posiada tylko dwa ideały: P/I oraz $\{0+I\}$.

Załóżmy nie wprost, że istnieje $J \triangleleft P/I$ taki, że:

$J \neq P/I$ oraz $J \neq \{0+I\}$

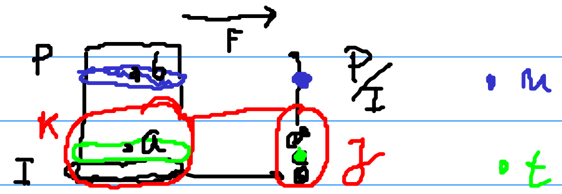
Zauważmy, że $\{0+I\} \subsetneq J \subsetneq P/I$. (*)

Rozważmy funkcję

$$F(a) = a + I : P \to P/I$$

Zauważmy że F jest homomorfizmem "na":

$F(a\dot{+}b) = (a\dot{+}b) + I = (a+I)\dot{+}(b+I) = F(a)\dot{+}F(b)$.



- Z obserwacji (*), istnieją $u, t \in P/I$ takie że $t \in J$, $t \neq 0+I$ oraz $u \notin J$.
- F jest "na" więc istnieją $a, b \in P$ takie, że:

$$F(a) = t \quad \text{oraz} \quad F(b) = u$$

Rozważmy zbiór $K = F^{-1}[J]$.

Zauważmy $I \subseteq K \subseteq P$ oraz.

(1). $K \triangleleft P$ z Lematu.

(2) $K \neq I$, bo $a \in K$, $a \notin I$

(3) $K \neq P$, bo $b \in P$, $b \notin K$.

Zatem I nie jest ideałem maksymalnym. Sprzeczność.
Założenie nie wprost jest fałszywe, tzn
P/I ma tylko 2 ideały.
Więc P/I jest ciałem. $\square$