Kontakt: • e-mail: k.mejdner.pwr.edu.pl.
• Strona: mejdner, szmeragd.

Zasady zaliczenia • Ocena końcowa = ocena z ćwiczeń (nie ma egzaminu).
• Ocena z ćwiczeń na podst 2× kartkówka + aktywność.

Wykład: • struktury algebraiczne: grupy, pierścienie, ciała.
• Liczby naturalne.
• Liczby zespolone - $\sqrt{-1}$
• Wielomiany.
• Algebra Liniowa ... Wektory, macierze ...

Literatura: • Wstęp do algebry . Kostrikin.
• Algebra Liniowa . Kostrikin.

Język matematyczny:

Symbole logiczne:
$\wedge, \vee, \neg, \longrightarrow, \longleftrightarrow$: i, lub, nieprawda, jeśli, to, wtedy i tylko wtedy

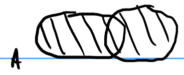
$A \Leftrightarrow B$ ≡ A wtedy i tylko wtedy gdy B

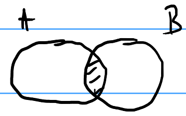
Kwantyfikatory
$\forall x$, $\exists x$: dla każdego x, Istnieje x

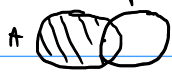
Zbiory: $a \in A$, a jest elementem zbioru A

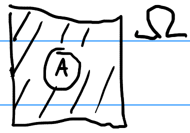
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, liczby: naturalne, całkowite, wymierne, rzeczywiste.
- $\{a,b,c,1,2\} \ni 2$
- $\{x \in A :$ x spełnia własności .....$\}$ np $\{n \in \mathbb{N} :$ n jest podzielne przez 2$\}$

Działania na zbiorach.

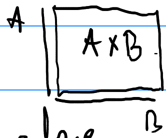
$A \cup B$ - suma 

$A \cap B$ - część wspólna (przekrój) 

$A \setminus B$ - różnica 

A^c - dopełnienie 

: $\Omega \setminus A$



$A \times B$ - iloczyn kartezjański

elementy $A \times B$ są pary (a,b) gdzie $a \in A$, $b \in B$

Np $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \ni (2, \pi)$

- $X \times X \times X = X^3$, np: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Funkcje:

- $f: A \to B$ oznacza f jest funkcją o dziedzinie A wartości należą do B.

np: $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$

- $f: A \times B \to C$.
  $f(a,b) \in C$

- Przykład $f(x,y) = x+y$: $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Działanie 2-argumentowe.

Def. Działanie (2-argumentowe) na zbiorze X nazywamy funkcję której dziedziną jest $X \times X$ a wartości należą do X

$$\circ : X \times X \longrightarrow X$$

Zapis $a \circ b$.

Przykłady $+$ jest działaniem na $\mathbb{N}$.
$+$ jest działaniem na $\mathbb{R}$
$-$ jest działaniem na $\mathbb{R}$.
$-$ NIE jest działaniem na $\mathbb{N}$ bo $3-5 \notin \mathbb{N}$.
$+, -, \cdot, :$ działania na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Def. Niech $\circ$ działanie na zbiorze X. Wtedy
1. $\circ$ nazywamy łącznym gdy:
$$(\forall a,b,c \in X) \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

2. $\circ$ nazywamy przemiennym gdy
$$(\forall a,b \in X) \quad a \circ b = b \circ a.$$

Przykłady, uwagi

- $+$ jest łączne i przemienne na $\mathbb{R}$.
- $-$ Nie jest łączne! $(1-1)-1 = (-1) \neq 1 = 1-(1-(1-1))$
- $-$ Nie jest przemienne na $\mathbb{R}$ $\quad 2-3 \neq 3-2$.

- Jeśli działanie jest łączne to $a \circ b \circ c \circ d$ ma sens.

- $\underbrace{a \circ a \circ a \circ \cdots \circ a}_{n} = a^n$ możemy def. potęgowanie.

Def. Niech $\circ$ działanie na X. Wtedy.
1. Element $e \in X$ nazywamy elementem neutralnym gdy
$(\forall x \in X).\ e \circ x = x \circ e = x$

2. Niech $e \in X$ element neutralny, $x \in X$. (przeciwny)
$y \in X$ nazywamy elementem odwrotnym do x gdy
$x \circ y = y \circ x = e$.

Przykłady • działanie $+$ na $\mathbb{R}$.
element neutralny $e = 0$ $\quad 0 + x = x + 0 = x$
element odwrotny do $x \in X$ to $(-x)$: $x + (-x) = 0 = e$.
(element przeciwny)

• działanie $\circ$ na $\mathbb{R}$. elem neutr $e = 1$
element odwrotny do x to $\frac{1}{x} = x^{-1}$

Uwaga: Element neutralny i elementy odwrotne nie zawsze istnieją
Np: $+$ na $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ nie ma elem neutr.
• na $\mathbb{R}$, elem odwrotny do 0 nie istnieje

Tw. Niech $\circ$ działanie na X. Wtedy.
1. Istnieje nie więcej niż jeden element neutralny w X.

2. Jeśli $\circ$ jest łączne na X to każdy element zbioru X ma nie więcej niż jeden element odwrotny.

Dowód:
1. Niech e_1, e_2 elementy neutralne działania $\circ$ na X.

$$e_2 = \underbrace{e_1}_{\text{neutr}} \circ \underbrace{e_2}_{\text{neutr}} = e_1$$

$$e_2 = e_1 \qquad \square$$

2. Niech $x \in X$. Niech a, b elementy odwrotne do x

$$b = e \circ b = (a \circ x) \circ b \stackrel{\text{Ł}}{=} a \circ (x \circ b) = a \circ e = a.$$

$a = b$ $\square$

GRUPY.

Def. Grupą nazywamy zbiór G oraz działanie $\circ$ takie że:

1. $\circ$ jest działaniem łącznym na G.
2. W G istnieje element neutralny
3. Każdy element ma element odwrotny.

Ozn: $(G, \circ)$.

Przykłady • $(\mathbb{Z}, +)$, $e = 0$, przeciwny do k to $-k$

• $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ $e = 1$, przeciwny do x to $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

• wektory w $\mathbb{R}^2$ z dodawaniem

Oznaczenie: - element neutralny oznaczamy e.
- element odwrotny do x oznaczamy x^{-1}

Przykład grupy skończonej.

Niech $n \in \mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Grupa $C_n = (\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, +_n)$

dla $a, b \in \{0, \ldots n-1\}$ $a +_n b =$ reszta z dzielenia $a + b$ przez n

Fakt Dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ C_n jest grupą

Przykład. $C_5 = (\{0,1,2,3,4\}\ +_5)$.

$3 +_5 4$ = reszta z dziel $3+4$ przez 5.
$\underbrace{\qquad\qquad}_{\parallel}$ 7 przez $5 = 2$

$3 +_5 4 = 2$.

Element neutr $e = 0$

Element odwrotny do 2 to

$2 +_5 x = 0$

zauw: $2 +_5 3 = 0$

Element odwrotny do 2 to 3.